

Análise Matemática III

Feliz Minhós

Conteúdo

Introdução	1
Objectivos Gerais	3
Programa	5
1 Elementos de Geometria Diferencial em \mathbb{R}^3	9
1.1 Generalidades sobre o espaço \mathbb{R}^n	10
1.2 Curvas de nível e curvas parametrizadas	10
1.3 Comprimento de arco	11
1.4 Curvatura e torção. Fórmulas de Frenet-Serret	18
1.5 Superfícies	26
1.6 Plano tangente e recta normal	33
1.7 Exercícios	39
1.8 Actividades	43
2 Introdução à Análise Complexa	45
2.1 Generalidades	47
2.2 Funções complexas e funções analíticas	47
2.3 Equações de Cauchy-Riemann	51
2.4 Equação de Laplace. Funções harmónicas	54
2.5 Geometria das funções analíticas. Transformação conforme	55
2.6 Funções complexas elementares	59
2.6.1 Função exponencial	60
2.6.2 Funções trigonométricas e hiperbólicas	63
2.6.3 Função logaritmo	64
2.6.4 Potências complexas generalizadas	69
2.7 Integração complexa	72
2.7.1 Integral de caminho	72
2.7.2 Propriedades elementares	74

2.8	Teorema fundamental do cálculo	78
2.9	Teorema de Cauchy e sua evolução	80
2.10	Fórmula integral de Cauchy e aplicações	84
2.11	Exercícios	93
2.12	Actividades	98
3	Equações Diferenciais Ordinárias	101
3.1	Definições e generalidades	102
3.2	Equações exactas e factores integrantes	105
3.3	Equações elementares de 1 ^a ordem	109
3.3.1	Equação de variáveis separáveis	109
3.3.2	Equação homogénea	110
3.3.3	Equação homográfica	111
3.3.4	Equação linear de 1 ^a ordem	112
3.3.5	Equação de Bernoulli	113
3.3.6	Equação de Riccati	114
3.4	Equações lineares de 2 ^a ordem	115
3.4.1	Redução de ordem	116
3.4.2	Solução particular da equação não homogénea	117
3.4.3	Equação homogénea com coeficientes constantes	118
3.5	Exercícios	121
3.6	Actividades	124
4	Sistemas de EDO	129
4.1	Introdução e notações	130
4.2	Sistemas lineares	134
4.3	Sistemas com coeficientes constantes	142
4.4	Sistemas periódicos lineares	145
4.5	Comportamento assintótico das soluções	148
4.6	Estabilidade de soluções	161
4.7	Sistemas autónomos planares	162
4.8	Exercícios	175
4.9	Actividades	181
5	Séries de Fourier	185
5.1	Funções periódicas	185
5.2	Séries trigonométricas	186
5.3	Fórmulas de Euler para os coeficientes	187
	Cálculo de a_0	187
	Cálculo dos coeficientes a_n	187

Cálculo dos coeficientes b_n	189
5.4 Ortogonalidade	191
5.5 Convergência uniforme	193
5.6 Convergência e soma das séries de Fourier	201
5.7 Funções com um período genérico $2L$	203
5.8 Expansão em séries de senos e co-senos	206
5.9 Prolongamentos periódicos	209
5.10 Séries de Fourier complexas	212
5.11 Integrais de Fourier	215
5.12 Exercícios	222
Bibliografia	225
Bibliografia base	225
Leituras complementares	225

Introdução

Unidade Curricular: Análise Matemática III

Tipo: Obrigatória

Nível: Base

Ano: 2º

Semestre: 1º

Carga horária semanal: 3 horas de Aulas Teóricas e 2 horas de Aulas

Práticas

Créditos (ECTS): 6

Objectivos Gerais

Considerando esta unidade curricular no âmbito da formação pessoal e científica, em geral, e da formação matemática em particular, o aluno deverá:

- Desenvolver capacidades de abstracção, dedução lógica e análise.
- Adquirir métodos e técnicas estruturantes do raciocínio científico e matemático que proporcione um espírito crítico.
- Dominar conteúdos matemáticos associados à Análise Complexa, às Equações Diferenciais Ordinárias, Séries de Fourier e Geometria Diferencial no espaço, ao nível de conceitos e aplicações.
- Utilizar conhecimentos matemáticos na resolução de problemas e interpretação da realidade.
- Adquirir competências matemáticas que possam vir a ser desenvolvidas e aplicadas em contexto profissional empresarial, de investigação ou de ensino.

Programa

O aluno deverá dominar o Cálculo Diferencial e Integral, em \mathbb{R} e em \mathbb{R}^n , bem como conceitos básicos de Álgebra Linear.

Em termos da estrutura curricular da Matemática Aplicada da Universidade de Évora, deverá ter conhecimentos matemáticos fornecidos pela Análise Matemática I e II e pela Álgebra e Geometria Analítica I.

Em cada capítulo do programa são apresentadas secções com os seguintes conteúdos:

- ▷ Objectivos específicos relacionados com os conteúdos matemáticos que o aluno deverá adquirir;
- ▷ Resumo dos principais resultados bem como considerações que permitem ilustrar a metodologia seguida;
- ▷ Exemplos e exercícios, a serem resolvidos na aula, que, além de ilustrarem resultados e ajudarem a clarificar conceitos, funcionam como motivação para a matéria seguinte;
- ▷ Ficha-exemplo de exercícios sugeridos;
- ▷ Exemplos de trabalhos optativos sugeridos.

Como esta disciplina abarca várias áreas da Matemática precisa-se, por capítulo, os conteúdos-base necessários a uma compreensão adequada do programa:

1. Elementos de Geometria Diferencial em \mathbb{R}^3

- 1.1. Generalidades sobre o espaço \mathbb{R}^n
- 1.2. Curvas de nível e curvas parametrizadas
- 1.3. Comprimento de arco. Parametrização por comprimento de arco
- 1.4. Curvatura e torção. Fórmulas de Frenet-Serret

- 1.5. Superfícies.
- 1.6. Plano tangente e recta normal a uma superfície. Orientabilidade.

2. Introdução à Análise Complexa

- 2.1. Generalidades.
- 2.2. Funções complexas e funções analíticas.
- 2.3. Equações de Cauchy-Riemann.
- 2.4. Equação de Laplace. Funções harmónicas.
- 2.5. Geometria das funções analíticas. Transformação conforme.
- 2.6. Funções complexas elementares.
 - (i) Função exponencial
 - (ii) Funções trigonométricas e hiperbólicas
 - (iii) Função logaritmo
 - (iv) Potências complexas generalizadas
- 2.7. Integração complexa
 - (i) Integral de caminho
 - (ii) Propriedades elementares
- 2.8. Teorema Fundamental do Cálculo.
- 2.9. Teorema de Cauchy e sua evolução.
- 2.10. Fórmula integral de Cauchy e aplicações.

3. Equações Diferenciais Ordinárias

- 3.1. Definições e generalidades.
- 3.2. Equações exactas e factores integrantes.
- 3.3. Equações elementares de 1^a ordem
 - (i) Equação de variáveis separáveis
 - (ii) Equação homogénea
 - (iii) Equação homográfica
 - (iv) Equação linear de 1^a ordem
 - (v) Equação de Bernoulli
 - (vi) Equação de Riccati
- 3.4. Equações lineares de 2^o ordem
 - (i) Redução de ordem .
 - (ii) Solução particular da equação não homogénea
 - (iii) Equação homogénea com coeficientes constantes

4. Sistemas de equações diferenciais ordinárias

- 4.1. Introdução e notações

- 4.2. Sistemas lineares
- 4.3. Sistemas com coeficientes constantes
- 4.4. Sistemas periódicos lineares
- 4.5. Comportamento assintótico das soluções de sistemas lineares.
- 4.6. Estabilidade de soluções
- 4.7. Sistemas autônomos planares

5. Séries de Fourier

- 5.1. Funções periódicas.
- 5.2. Séries trigonométricas.
- 5.3. Fórmulas de Euler para os coeficientes de Fourier.
- 5.4. Ortogonalidade.
- 5.5. Convergência uniforme
- 5.6. Convergência e soma das séries de Fourier.
- 5.7. Funções com um período genérico $2L$
- 5.8. Expansão em séries de senos e co-senos
- 5.9. Prolongamentos periódicos
- 5.10. Séries de Fourier complexas.
- 5.11. Integrais de Fourier.

Capítulo 1

Elementos de Geometria Diferencial em \mathbb{R}^3

Neste capítulo pretende-se que o aluno:

- Adquira a noção de curva, entenda a importância da parametrização de curvas e reconheça a vantagem de algumas reparametrizações.
- Utilize adequadamente a função comprimento de arco.
- Associe a cada curva as funções escalares curvatura e torção.
- Interprete e calcule num ponto da curva: recta tangente, recta normal, recta binormal, plano osculador, plano normal e plano rectificante.
- Calcule e interprete o triedro de Frenet-Serret.
- Parametrize uma superfície.
- Calcule as expressões do plano tangente e da recta normal a uma superfície.
- Adquira o conceito de superfície orientável.
- Utilize *software* adequado para visualização geométrica e auxílio à resolução de problemas.

1.1 Generalidades sobre o espaço \mathbb{R}^n

Rever alguns conceitos (já abordados em Análise Matemática II) sobre:

- espaço vectorial \mathbb{R}^n e operações nele definidos, tais como: distância, produto interno (ou produto escalar), norma, produto externo (ou produto vectorial),...
- funções vectoriais de variável real;
- limites e continuidade;
- diferenciabilidade e integrabilidade;

1.2 Curvas de nível e curvas parametrizadas

Intuitivamente existe uma noção de curva. Mesmo sem uma definição formal apontam-se exemplos e até se exibem as respectivas equações cartesianas: rectas, parábolas, circunferência,...

Estas curvas são descritas por meio duma equação cartesiana $f(x, y) = c$. Neste ponto de vista, uma curva é um conjunto de pontos. Se for uma **curva plana** será

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\},$$

para $c \in \mathbb{R}$.

No espaço \mathbb{R}^3 uma curva pode ser definida por um par de equações

$$f_1(x, y, z) = c_1, \quad f_2(x, y, z) = c_2,$$

com $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Por exemplo, o eixo OZ em \mathbb{R}^3 é a recta dada pelo conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}.$$

Este tipo de curvas são designadas por **curvas de nível**. Por exemplo, a curva dada por C é o conjunto de pontos (x, y) do plano nos quais a quantidade $f(x, y)$ atinge o “nível” c .

Por vezes é mais útil considerar uma curva como o caminho percorrido por um ponto a mover-se no espaço, pelo que se torna necessário uma expressão que indique a posição do ponto móvel em função de um parâmetro (tempo, ângulo,...). A definição inclui ambos os casos (\mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3) em simultâneo:

Definição 1.2.1 Uma **curva parametrizada** em \mathbb{R}^n é uma função $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida num intervalo I de \mathbb{R} .

À imagem $\gamma(I)$ de uma curva parametrizada chamamos **traço** (ou **trajectória** ou **caminho da curva**).

Uma curva parametrizada cujo traço esteja contido numa curva C diz-se uma parametrização de C , ou de uma parte de C .

Para sublinhar a diferença entre a curva parametrizada e o traço, bem como a vantagem destas em relação às curvas de nível, veja-se a seguinte situação:

Um caracol desloca-se de um ponto A até um ponto B , marcando-se em cada instante t a sua posição, iniciada, para $t = 0$, em A . Quando chegar a B terá percorrido um caminho.

O mesmo efeito pode ser obtido se se seguir o rasto do caracol.

Contudo existe uma diferença significativa entre os dois processos. No segundo caso, olhando o rasto do caracol, não é possível dizer se esteve parado algum tempo num ou em vários pontos. Nem tão pouco se poderá saber se passou várias vezes pelo mesmo ponto, se repetiu alguma parte do caminho, por exemplo se andou para trás e para a frente.

Exercício 1.2.2 Determine uma curva parametrizada γ que represente a linha recta que passa pelos pontos $A=(1,-2,3)$ e $B=(-3,0,4)$.

Verifique que essa parametrização não é única.

Definição 1.2.3 Uma curva parametrizada γ diz-se de classe C^k , ($k \in \mathbb{N}_0$), notando-se por $\gamma \in C^k$, se existirem e forem contínuas todas as suas derivadas até à ordem k : $\gamma, \gamma', \dots, \gamma^{(k)}$.

A curva γ diz-se **suave** se for de classe C^∞ .

Neste curso, salvo referência em contrário, a palavra “curva” referir-se-á a curvas parametrizadas suaves.

1.3 Comprimento de arco. Parametrização por comprimento de arco

Como calcular o comprimento de uma curva (não rectilínea) no plano ou no espaço?

Marca-se um certo número de pontos (partição) sobre a curva e traça-se uma linha poligonal inscrita.

Observe-se que:

- Aumentando o número de pontos (refinando a partição), aumenta-se o número de vértices e a linha poligonal inscrita adapta-se melhor à curva.
- O comprimento do polígono inscrito não excede o comprimento da curva.

Formalizando: Se a curva for parametrizada por $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, decompõe-se o intervalo $[a, b]$ utilizando o conjunto $D = \{t_i, i = 0, \dots, n+1\}$ de modo que

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = b.$$

Obtem-se assim uma linha poligonal de vértices $\gamma(t_i), i = 0, \dots, n+1$, cujo comprimento L será

$$L_D = \sum_{i=0}^n \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|.$$

Se a curva for de classe $C^1([a, b])$ então

$$L_D = \sum_{i=0}^n \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt \right\| \leq \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \quad (1.3.1)$$

A desigualdade (1.3.1) é válida para qualquer partição D , pelo que

$$\sup_D L_D \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Nestes casos diz-se que a curva γ é **rectificável** e tem-se a seguinte definição:

Definição 1.3.1 *O comprimento de arco de uma curva $\gamma \in C^1([a, b])$ a partir do ponto $\gamma(\tau)$, $\tau \in [a, b]$, é a função s definida por*

$$s(t) = \int_{\tau}^t \|\gamma'(u)\| du. \quad (1.3.2)$$

Em particular o comprimento total de γ será obtido, para $\tau = a$, por

$$s(b) = \int_a^b \|\gamma'(u)\| du.$$

Exercício 1.3.2 *Determine o comprimento de arco da espiral logaritmica $\gamma : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por*

$$\gamma(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$$

a partir do ponto $(1, 0)$.

Exercício 1.3.3 Considere uma curva plana dada por $y = f(x)$, com $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Escreva-a como curva parametrizada $\gamma(x)$ e calcule o comprimento de arco a partir dum ponto arbitrário $\gamma(x_0)$.

Compare com a expressão já conhecida do Cálculo Integral em \mathbb{R} .

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo Integral a (1.3.2) obtem-se

$$\frac{ds}{dt} = \|\gamma'(t)\| \quad (1.3.3)$$

de onde podemos obter o elemento de arco

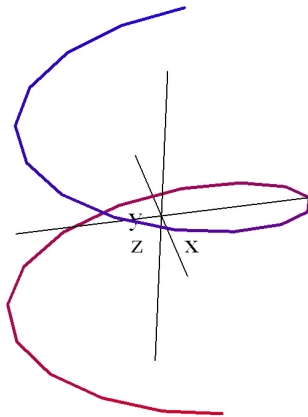
$$ds = \|\gamma'(t)\| dt,$$

permitindo **parametrizar curvas em função do comprimento de arco** s .

Exercício 1.3.4 Considere a curva parametrizada $\gamma : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R}, \quad (1.3.4)$$

cujo traço é uma **hélice circular**.



Hélice

Considerando o ponto $(a, 0, 0)$ como origem do arco, mostre que a parametrização da hélice γ em função do comprimento de arco é dada por

$$\Gamma(s) = \left(a \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), a \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \quad (1.3.5)$$

para $s \in [0, +\infty[$.

A parametrização por comprimento de arco torna mais simples algumas fórmulas e resultados, (caso das Fórmulas de Frenet-Serret, por exemplo).

Proposição 1.3.5 *Em qualquer curva γ parametrizada por comprimento de arco, $(\gamma''(s)|\gamma'(s)) = 0$, para qualquer s , isto é, ou $\gamma''(s) = 0$, ou $\gamma'(s) = 0$, ou $\gamma''(s)$ é perpendicular a $\gamma'(s)$, para qualquer s .*

Dem. Como a curva γ está parametrizada por comprimento de arco, tem-se

$$1 = \|\gamma'(t)\|^2 = (\gamma'(s)|\gamma'(s)),$$

para qualquer t . Por derivação relativamente a t obtem-se

$$(\gamma''(s)|\gamma'(s)) + (\gamma'(s)|\gamma''(s)) = 0,$$

ou seja, $2(\gamma''(s)|\gamma'(s)) = 0$. ■

Esta mudança de parâmetro por comprimento de arco, permite colocar várias questões:

Em que consiste uma mudança de parâmetro? Que propriedades permanecem invariantes e quais as que se alteram? É sempre possível a sua realização?

Definição 1.3.6 *Chama-se **mudança de parâmetro** a uma bijecção $\varphi : J \rightarrow I$ entre intervalos de \mathbb{R} , tal que φ e φ^{-1} são suaves.*

*Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva. À composição $\gamma \circ \varphi$, de γ com uma mudança de parâmetro φ , chama-se **reparametrização** de γ .*

Exemplo 1.3.7 *A expressão (1.3.5) é uma reparametrização de (1.3.4) uma vez que*

$$\Gamma(s) = (\gamma \circ \varphi)(t)$$

sendo $s := \varphi(t) = \sqrt{a^2 + b^2} t$.

Observação 1.3.8 (i) *Como a inversa de qualquer mudança de parâmetro também é uma mudança de parâmetro, se $\alpha = \gamma \circ \varphi$ é uma reparametrização da curva γ , também γ é uma reparametrização da curva α .*

(ii) *Duas curvas que são reparametrizações uma da outra têm o mesmo traço, pelo que terão as mesmas propriedades geométricas.*

(iii) *Uma função bijectiva suave $\varphi : J \rightarrow I$ é uma mudança de parâmetro se e só se $\varphi'(t) \neq 0$, $\forall t \in J$.*

O facto de φ nunca se anular implica que $\varphi'(t) > 0$ ou $\varphi'(t) < 0$, para todo

o $t \in J$.

No primeiro caso diz-se que φ **preserva a orientação** e no segundo caso que **inverte a orientação**.

Sendo o comprimento uma propriedade geométrica é natural o seguinte resultado:

Proposição 1.3.9 *Seja $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização da curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Então os comprimentos de α e β são iguais.*

Dem. Seja φ a mudança de parâmetro tal que $\beta = \alpha \circ \varphi$. O comprimento de arco, $c(\beta)$, de β em $[c, d]$ é igual a

$$c(\beta) = \int_c^d \|\beta'(t)\| dt = \int_c^d \|\alpha'(\varphi(t)) \varphi'(t)\| dt = \int_c^d \|\alpha'(\varphi(t))\| |\varphi'(t)| dt.$$

Se $\varphi'(t) > 0$, para qualquer t , então

$$c(\beta) = \int_c^d \|\alpha'(\varphi(t))\| \varphi'(t) dt = \int_a^b \|\alpha'(u)\| du = c(\alpha),$$

fazendo a mudança de variável $u = \varphi(t)$. Caso contrário, se $\varphi'(t) < 0$, para qualquer t , tem-se

$$c(\beta) = - \int_c^d \|\alpha'(\varphi(t))\| \varphi'(t) dt = \int_a^b \|\alpha'(u)\| du = c(\alpha).$$

■

Todas as curvas admitem reparametrizações por comprimento de arco ?

Definição 1.3.10 *Um ponto $\gamma(t)$ de uma curva é um **ponto regular** se $\gamma'(t) \neq 0$. Caso contrário diz-se um **ponto singular** de γ .*

*Uma **curva** é **regular** se todos os seus pontos são regulares.*

Algumas propriedades das curvas regulares:

Proposição 1.3.11 *Qualquer reparametrização de uma curva regular é regular.*

Dem. Seja $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$ uma reparametrização de uma curva regular γ . Derivando ambos os membros daquela igualdade obtém-se

$$\tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(\varphi(t)) \varphi'(t).$$

Como $\varphi'(t)$ e γ é uma curva regular o resultado fica provado. ■

Teorema 1.3.12 *Uma curva possui uma reparametrização por comprimento de arco se e só se é regular.*

Dem. Em primeiro lugar, considere-se curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ que possui uma reparametrização por comprimento de arco $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$. Então $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$, para alguma mudança de parâmetro $\varphi : I \rightarrow J$, e, para qualquer $t \in I$, $\gamma'(t) = \tilde{\gamma}'(\varphi(t)) \varphi'(t)$. Logo $\gamma'(t)$ nunca se anula (pois $\tilde{\gamma}$ está parametrizada por comprimento de arco, pelo que $\|\tilde{\gamma}'(t)\| = 1$, para qualquer $t \in J$, e φ é uma mudança de parâmetro).

Reciprocamente, seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $t_0 \in I$. Defina-se $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du.$$

Como é uma função diferenciável existe

$$\begin{array}{ccc} s' : I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \|\gamma'(t)\|. \end{array}$$

Como γ é suave, então s' é também suave, pelo que s' é suave. A regularidade de γ implica que $s' > 0$. Logo s é crescente e, portanto, é injectiva. Designe-se por J a imagem $s(I)$. Deste modo tem-se uma bijecção $s : I \rightarrow J$ que é uma função suave. Uma vez que s' nunca se anula, pela Observação 1.3.8, $s^{-1} : J \rightarrow I$ é uma mudança de parâmetro. Finalmente a composição $\gamma \circ s^{-1}$ é uma reparametrização de γ por comprimento de arco. De facto

$$\begin{aligned} \|(\gamma \circ s^{-1})'(t)\| &= \|(s^{-1})'(t) \gamma'(s^{-1}(t))\| \\ &= |(s^{-1})'(t)| \|\gamma'(s^{-1}(t))\| \\ &= \left| \frac{1}{s'(s^{-1}(t))} \right| \|\gamma'(s^{-1}(t))\| \\ &= \frac{1}{\|\gamma'(s^{-1}(t))\|} \|\gamma'(s^{-1}(t))\| = 1. \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.3.13 *A hélice dada por (1.3.4) pode ser parametrizada por comprimento de arco por ser regular, pois*

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0,$$

para qualquer $a > 0$ e b real.

Embora qualquer curva regular possua uma reparametrização por comprimento de arco, pode ser complicado determinar explicitamente essa reparametrização. Veja-se, por exemplo, dois tipos de dificuldades:

1. Pode não ser possível exprimir o integral (1.3.2) em termos de funções "usuais".

Por exemplo, para a curva dada por

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3), \quad t \in \mathbb{R},$$

tem-se $\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$. A curva γ é regular, pois $\gamma'(t)$ nunca se anula. O comprimento de arco a partir de $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ é

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4u^2 + 9u^4} du$$

o qual não possui primitiva imediata (integral elíptico).

2. Mesmo que se consiga determinar $s(t)$, poderá não ser fácil, ou até possível, encontrar a função inversa $s^{-1} : s(I) \rightarrow I$. É o caso, por exemplo, da parábola dada por $\gamma(t) = (t, t^2/2)$ uma vez que $\gamma'(t) = (1, t)$ e

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + u^2} du = \frac{1}{2} \left(t\sqrt{1 + t^2} + \ln \left(t + \sqrt{1 + t^2} \right) \right).$$

A parametrização assegurada pelo Teorema 1.3.12 é "quase a única" reparametrização por comprimento de arco de uma curva regular, conforme se pode ver no próximo resultado:

Proposição 1.3.14 *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $\alpha : J_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização por comprimento de arco de γ . Então $\beta : J_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é também uma reparametrização por comprimento de arco de γ se e só se $\beta = \alpha \circ \varphi$, para $\varphi : J_2 \rightarrow J_1$ definida por $\varphi(t) = t + c$ ou $\varphi(t) = -t + c$, com $c \in \mathbb{R}$.*

Dem. Prove-se em primeiro lugar a condição suficiente.

Seja $\beta = \alpha \circ \varphi$, com α uma reparametrização de γ , e $\beta = \gamma \circ \delta \circ \varphi$, para alguma mudança de parâmetro δ . Como

$$\|\beta'(t)\| = |\varphi'(t)| \|\alpha'(\varphi(t))\| = \|\alpha'(\varphi(t))\| = 1,$$

então β é uma reparametrização de γ , por comprimento de arco.

Reciprocamente, se $\beta = \gamma \circ \varphi_2$ e $\alpha = \gamma \circ \varphi_1$ são reparametrizações por comprimento de arco de γ , então

$$\beta = \gamma \circ \varphi_2 = \alpha \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2.$$

Seja $\varphi = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$. Então

$$\beta'(t) = \varphi'(t) \alpha'(\varphi(t))$$

e

$$\|\beta'(t)\| = |\varphi'(t)| \|\alpha'(\varphi(t))\|.$$

Mas, para qualquer $t \in J_2$, $\|\beta'(t)\| = 1 = \|\alpha'(\varphi(t))\|$, donde $|\varphi'(t)| = 1$. Logo, $\varphi'(t) = 1$ ou $\varphi'(t) = -1$. Pelo Teorema do Valor intermédio pode mesmo dizer-se que para qualquer $t \in J_2$ ou $\varphi'(t) = 1$ ou $\varphi'(t) = -1$. Portanto $\varphi(t) = t + c$ para qualquer $t \in J_2$ ou $\varphi(t) = -t + c$ para qualquer $t \in J_2$. ■

Note-se ainda que uma curva de nível pode ter parametrizações regulares e outras não regulares. Por exemplo, a parábola $y = x^2$ pode ter uma parametrização regular dada por $\gamma(t) = (t, t^2)$ e uma não regular definida por $\alpha(t) = (t^3, t^6)$.

Salvo referência em contrário, utilizar-se-á, neste curso, o termo “curva” para designar uma curva regular.

1.4 Curvatura e torção. Fórmulas de Frenet-Serret

A cada curva pode-se associar duas funções escalares: a curvatura e a torção.

A curvatura mede quanto a curva se afasta de estar contida numa recta (pelo que as linhas rectas têm curvatura zero) e a torção mede quanto a curva se afasta de estar contida num plano (portanto, curvas planas têm torção zero).

São necessárias algumas definições:

Definição 1.4.1 *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva e $t \in I$. O vector $\gamma'(t)$ designa-se por **vector tangente** de γ no ponto $\gamma(t)$.*

*Chama-se **recta tangente** à curva γ no ponto $\gamma(t)$, à recta determinada pelo ponto $\gamma(t)$ e pelo vector tangente $\gamma'(t)$.*

Comece-se por procurar, intuitivamente, uma medida da “curvatura” de uma curva, que indique, em cada ponto, o seu afastamento relativamente à tangente à curva nesse ponto. Essa medida deverá ter algumas propriedades óbvias:

(i) Como esta “curvatura” só deverá depender do traço da curva, deverá manter-se inalterável por reparametrização.

(ii) A curvatura de uma linha recta deverá ser zero;

(iii) A curvatura de uma circunferência deverá ser constante, e tanto maior quanto menor for o seu raio.

Pelo estudo de funções realizado em anos anteriores, pareceria "lógico" definir curvatura de γ no ponto $\gamma(t)$ como $\|\gamma''(t)\|$. Se assim fosse a curvatura dependeria da parametrização e não apenas do traço, como pretendido. Por este facto, e pela informação de "quase unicidade" dada pela Proposição 1.3.14, de momento, restringe-se o estudo às curvas parametrizadas por comprimento de arco.

Definição 1.4.2 *Seja γ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Chama-se **curvatura** de γ no ponto $\gamma(s)$, e denota-se por $\kappa(s)$, ao número $\|\gamma''(s)\|$.*

Exemplo 1.4.3 *Uma recta que passe por um dado ponto $A \in \mathbb{R}^3$, com a direcção do vector $v \in \mathbb{R}^3$, tem uma parametrização por comprimento de arco dada por $\gamma(s) = A + sv$. Facilmente se conclui que $\kappa(s) = 0$ para qualquer s .*

Exemplo 1.4.4 *Uma circunferência de centro na origem e raio $r > 0$ é parametrizada em relação ao comprimento de arco por*

$$\gamma(s) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right).$$

Como

$$\gamma''(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right)$$

então

$$\kappa(s) = \sqrt{\left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right)\right)^2 + \left(-\frac{1}{r} \sin\left(\frac{s}{r}\right)\right)^2} = \frac{1}{r}$$

pelo que a curvatura da circunferência é inversamente proporcional ao seu raio.

E no caso geral, como se deve definir (e calcular) a curvatura ?

O próximo resultado fornece uma relação para a curvatura apenas em termos de γ e t .

Proposição 1.4.5 *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva (regular). Então, para cada $t \in I$,*

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}. \quad (1.4.1)$$

Dem. Seja $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização por comprimento de arco de γ , com mudança de parâmetro $\varphi : I \rightarrow J$. De $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$ obtem-se, por derivação,

$$\gamma'(t) = \tilde{\gamma}'(\varphi(t)) \varphi'(t) \quad (1.4.2)$$

e

$$\gamma''(t) = \tilde{\gamma}''(\varphi(t)) (\varphi'(t))^2 + \tilde{\gamma}'(\varphi(t)) \varphi''(t). \quad (1.4.3)$$

Então

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = (\varphi'(t))^3 [\tilde{\gamma}'(\varphi(t)) \wedge \tilde{\gamma}''(\varphi(t))] \quad (1.4.4)$$

e, conseqüentemente,

$$\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| = |(\varphi'(t))^3| \|\tilde{\gamma}'(\varphi(t))\| \|\tilde{\gamma}''(\varphi(t))\|, \quad (1.4.5)$$

pois, pela Proposição 1.3.5, $\tilde{\gamma}'(\varphi(t))$ e $\tilde{\gamma}''(\varphi(t))$ são ortogonais. Mas

$$\begin{aligned} |\varphi'(t)| &= |\gamma'(t)|, \\ \|\tilde{\gamma}'(\varphi(t))\| &= 1 \end{aligned}$$

e

$$\|\tilde{\gamma}''(\varphi(t))\| = \kappa_{\tilde{\gamma}}(\varphi(t)) = \kappa_{\gamma}(t),$$

pelo que

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

■

A curvatura não é suficiente para se identificar completamente a forma de uma curva não plana. Basta pensar que a circunferência de raio 1, no plano XOY , e a hélice circular dada no Exercício 1.3.4, com $a = b = 1/2$, têm curvatura constante e igual a 1.

Assim é necessário introduzir um outro "tipo de curvatura" para curvas não planas, chamada **torção**, que medirá a variação do **plano osculador** da curva, isto é, o quanto uma curva se afasta de ser plana.

São necessários alguns conceitos:

Definição 1.4.6 *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco.*

(i) *Designa-se por*

$$T(s) = \frac{\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|}$$

*o seu **vector tangente unitário** no ponto $\gamma(s)$.*

(ii) Se a curvatura $\kappa(s)$ não for nula, define-se o **vector normal principal** (ou vector normal) de γ no ponto $\gamma(s)$ por

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}. \quad (1.4.6)$$

(Note-se que $N(s)$ é um vector unitário, pois $\|T'(s)\| = \kappa(s)$.)

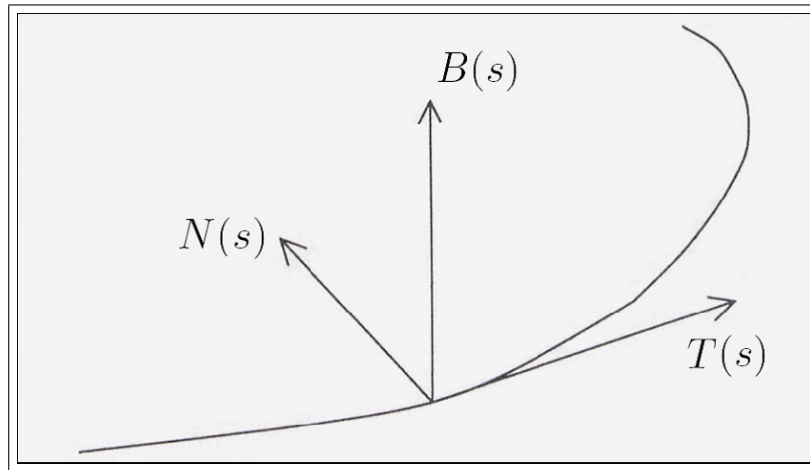
(iii) Chama-se **vector binormal** de γ no ponto $\gamma(s)$ a

$$B(s) = T(s) \wedge N(s). \quad (1.4.7)$$

(Repare-se que $B(s)$ é um vector unitário perpendicular a $T(s)$ e a $N(s)$.)

(iv) O conjunto $\{T(s), N(s), B(s)\}$, que se designa por **triedro de Frenet-Serret**, forma uma base ortonormada de \mathbb{R}^3 , (com a mesma orientação que a base canónica, orientação positiva), isto é

$$T(s) = N(s) \wedge B(s), \quad N(s) = B(s) \wedge T(s), \quad B(s) = T(s) \wedge N(s).$$



Triedro de Frenet-Serret

Em cada ponto $\gamma(s)$ temos três rectas e três planos "especiais":

- **recta tangente**, paralela a $T(s)$;
- **recta normal principal** (ou, apenas, recta normal), paralela a $N(s)$;
- **recta binormal**, paralela a $B(s)$;
- **plano osculador**, paralelo a $T(s)$ e $N(s)$;
- **plano normal**, paralelo a $N(s)$ e $B(s)$;
- **plano rectificante**, paralelo a $T(s)$ e $B(s)$.

As derivadas dos vectores anteriores, em ordem a s , permitirão obter as **fórmulas de Frenet-Serret**.

Proposição 1.4.7 $B'(s)$ é perpendicular a $B(s)$.

Dem. Como $B(s)$ é um vector unitário, $B'(s)$ é perpendicular a $B(s)$, pois

$$1 = \|B(s)\|^2 = (B(s)|B(s))$$

e derivando em ordem a s , obtem-se $2(B'(s)|B(s)) = 0$. ■

Recorde-se a regra da derivação para o produto externo de funções vectoriais F e G de parâmetro s :

$$(F \wedge G)'(s) = F'(s) \wedge G(s) + F(s) \wedge G'(s).$$

Aplicando esta regra a (1.4.7) obtem-se

$$B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s). \quad (1.4.8)$$

Proposição 1.4.8 $B'(s)$ é perpendicular a $T(s)$.

Dem. Por (1.4.8) e pela definição de $N(s)$, $T'(s) \wedge N(s) = k(s)N(s) \wedge N(s) = 0$.

A equação (1.4.8) mostra que $B'(s)$ também é perpendicular a $N'(s)$. ■
Das proposições anteriores resulta que:

Proposição 1.4.9 $B'(s)$ é paralelo a $N(s)$.

Então pode-se escrever

$$B'(s) = -\tau(s)N(s), \quad (1.4.9)$$

para um certo escalar $\tau(s)$, a que se chama **torção** de γ no ponto $\gamma(s)$.

O sinal – em (1.4.9) é convencional, de modo a tornar a torção positiva quando, por exemplo, uma hélice roda em sentido positivo.

Por outro lado o escalar $\tau(s)$ pode ser obtido de várias formas

$$\tau(s) = -N(s) | B'(s) = -\frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} | B'(s) = -\frac{1}{k(s)}T'(s) | B'(s). \quad (1.4.10)$$

Note-se que a torção só está definida caso a curvatura seja não nula. Além disso pode assumir valores negativos, ao contrário da curvatura.

E como se calcula $N'(s)$?

1.4. CURVATURA E TORÇÃO. FÓRMULAS DE FRENET-SERRET 23

Derivando membro a membro a igualdade $N(s) = B(s) \wedge T(s)$ obtem-se, por (1.4.9) e (1.4.7),

$$\begin{aligned} N'(s) &= B'(s) \wedge T(s) + B(s) \wedge T'(s) \\ &= -\tau(s)N(s) \wedge T(s) + \kappa(s)B(s) \wedge N(s) \\ &= -\tau(s)[B(s) \wedge T(s)] \wedge T(s) + \kappa(s)[T(s) \wedge N(s)] \wedge N(s) \\ &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s). \end{aligned}$$

Estas três derivadas podem ser resumidas no seguinte teorema:

Teorema 1.4.10 *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, cuja curvatura nunca se anula. Então, para cada $s \in I$, tem-se:*

$$T'(s) = \kappa(s)N(s); \quad (1.4.11)$$

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s); \quad (1.4.12)$$

$$B'(s) = -\tau(s)N(s). \quad (1.4.13)$$

As igualdades (1.4.11)-(1.4.13) chamam-se **equações** ou **fórmulas de Frenet-Serret** e podem ser representadas na forma de equação matricial recorrendo a uma matriz anti-simétrica:

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

Poderá ser útil exprimir a torção apenas em função de γ , sem recorrer a uma reparametrização por comprimento de arco, tal como foi feito para a curvatura em (1.4.1):

Proposição 1.4.11 *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, cuja curvatura nunca se anula. Então*

$$\tau(t) = \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \mid \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}.$$

Recorde-se que o produto misto da igualdade anterior pode ser calculado de uma forma prática recorrendo a um determinante de terceira ordem, composto pelas respectivas coordenadas de cada vector.

Exercício 1.4.12 Considere a hélice definida no Exercício 1.3.4.

1. Calcule a curvatura e a torção da hélice utilizando:

(a) a parametrização dada em (1.3.4)

(b) a reparametrização por comprimento de arco dada em (1.3.5)

2. Como se poderá justificar, de um ponto de vista geométrico, que a curvatura e a torção da hélice sejam constantes ?

As fórmulas de Frenet-Serret permitem obter e provar alguns resultados, como, por exemplo, a afirmação feita no início desta secção, que agora pode ser formulada na seguinte proposição:

Proposição 1.4.13 Considere $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, cuja curvatura nunca se anula. Então a torção de γ é nula se, e só se, γ está contida num plano (**plano osculador**).

Dem. Para qualquer reparametrização por comprimento de arco $\tilde{\gamma}$ de γ tem-se que:

- γ é plana se, e só se, $\tilde{\gamma}$ é plana;
- $\tau_\gamma = \tau_{\tilde{\gamma}}$.

Então o resultado será válido para uma curva geral se, e só se, é verdadeiro para qualquer sua reparametrização por comprimento de arco. Bastará então provar o resultado para curvas parametrizadas por comprimento de arco.

(\Rightarrow) Seja P o plano a que pertence o traço da curva γ . Consideremos um ponto p_0 desse plano e um vector unitário v perpendicular a esse plano. Então

$$P = \{p \in \mathbb{R}^3 : (p - p_0|v) = 0\}$$

e a condição $\gamma(I) \subseteq P$ traduz-se por

$$\forall s \in I, (\gamma(s) - p_0|v) = 0.$$

Derivando obtem-se

$$(T(s)|v) = 0 \text{ e } k(s)(N(s)|v) = 0$$

para qualquer $s \in I$. Isto significa que v é perpendicular a $T(s)$ e a $N(s)$, para qualquer $s \in I$. Portanto v é paralelo ao vector binormal $B(s)$ em cada $s \in I$, ou seja, $B(s) = \varphi(s)v$ para algum escalar real $\varphi(s)$. Como $\|v\| = \|B(s)\| = 1$, tem-se $|\varphi(s)| = 1$. Em conclusão $B(s) = v$ ou $B(s) = -v$ para cada $s \in I$. Mas a função $B : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $s \mapsto B(s)$ é suave,

logo $B(s) = v$ para qualquer $s \in I$, ou $B(s) = -v$ para qualquer $s \in I$. Em ambos os casos a função B é constante pelo que, por (1.4.9), $\tau(s) = 0$ para qualquer $s \in I$.

(\Leftarrow) Por (1.4.9) a função binormal é constante, igual em cada s a um dado vector B . A implicação contrária sugere que $\gamma(I)$ está contido num plano perpendicular a B . Fixando $s_0 \in I$, terá que passar pelo ponto $\gamma(s_0)$. Verifiquemos então que $\gamma(I)$ está contido no plano

$$\{p \in \mathbb{R}^3 : (p - \gamma(s_0)|B) = 0\},$$

ou seja, $(\gamma(s) - \gamma(s_0)|B) = 0$ para qualquer $s \in I$. Como

$$(\gamma(s) - \gamma(s_0)|B)' = (T(s)|B) = (T(s)|B(s)) = 0,$$

para qualquer $s \in I$, a função $s \mapsto (\gamma(s) - \gamma(s_0)|B)$ é constante. Por outro lado, em s_0 toma o valor $(\gamma(s_0) - \gamma(s_0)|B) = 0$. Portanto $(\gamma(s) - \gamma(s_0)|B) = 0$, para qualquer $s \in I$. ■

Outra aplicação pode ser dada pelo resultado:

Proposição 1.4.14 *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva com torção nula e curvatura κ constante. Então o traço de γ está contido numa circunferência de raio $1/\kappa$.*

Dem. Pela demonstração da Proposição 1.4.13, o vector binormal B é constante e o traço de γ está contido num plano perpendicular a B .

Considere-se os pontos

$$p(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k}N(t).$$

Como

$$p'(t) = v(t)T(t) + \frac{1}{k}N'(t) = v(t)T(t) - v(t)T(t) = 0,$$

pela segunda fórmula de Frenet-Serret, então $p(t)$ é constante, digamos $p(t) = p_0$ para qualquer $t \in I$. Além disso, para cada $t \in I$,

$$\|\gamma(t) - p_0\| = \left\| -\frac{1}{k}N(t) \right\| = \frac{1}{k},$$

o que mostra que todos os pontos da curva γ estão contidos na circunferência de centro p_0 e raio $\frac{1}{k}$. ■

Considerando a curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ como uma função vectorial $\gamma(t)$ que dá a posição de um ponto móvel no instante $t \in I$, então $\gamma(t)$ poderá ser considerada como um movimento, definindo a derivada $\gamma'(t)$ o vector **velocidade**, $v(t)$, no instante $t \in I$, cuja grandeza é dada por $\|\gamma'(t)\|$, e $a(t) = \gamma''(t)$, o vector **aceleração**, no instante $t \in I$.

1.5 Superfícies. Representação paramétrica de uma (parte de) superfície

No estudo de Análise Matemática já se encontraram alguns exemplos de superfícies, tais como : gráficos de funções de duas variáveis, superfícies de revolução, superfícies quádricas,...

Em termos de "matéria prima" existe desde já uma diferença entre a teoria das curvas e a teoria superfícies: toda a curva é descrita por uma parametrização e existe sempre uma "parametrização natural" sob o ponto de vista geométrico: a parametrização por comprimento de arco. Para as superfícies não existem essas parametrizações e nem sempre é possível encontrar uma parametrização que descreva toda a superfície.

No caso da esfera, por exemplo, qualquer que seja o modo como se escolhem os dois parâmetros, existirá sempre pelo menos um ponto que não pode ser descrito por eles.

No globo terrestre, utilizando a latitude e a longitude usuais como parâmetros, falham os pólos: $(90^\circ \text{ N}, 30^\circ \text{ E})$ e $(90^\circ \text{ N}, 60^\circ \text{ O})$ são o mesmo ponto.

O que é então uma superfície?

Empiricamente, será um subconjunto de \mathbb{R}^3 que “se assemelha” a uma parte de \mathbb{R}^2 “numa vizinhança” de qualquer ponto, tal como a superfície da Terra, embora esférica, parece plana a um observador nela colocado que consegue ver somente até à linha do horizonte.

Formalmente tem-se a definição:

Definição 1.5.1 (i) Um subconjunto não vazio $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma **superfície** se, para cada $p \in S$, existirem um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, um aberto $V \subset \mathbb{R}^3$ contendo p e um homeomorfismo $\sigma : U \rightarrow W := S \cap V$, o qual se designa por **parametrização** de S .

(ii) A superfície S diz-se **suave** se toda a parametrização $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow W := S \cap V \subset \mathbb{R}^3$ de S for uma função suave.

(iii) A superfície S diz-se **regular** se para toda a parametrização $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow W := S \cap V \subset \mathbb{R}^3$ de S , com $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, e para cada $q \in U$, a matriz jacobiana

$$J_\sigma(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(q) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(q) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(q) \end{bmatrix}$$

tem característica 2.

Neste curso estudam-se apenas superfícies suaves regulares, as quais poderão ser designadas abreviadamente por “superfícies”.

Note-se que a condição (iii) equivale a dizer que os vectores-colunas de $J_\sigma(q)$ são linearmente independentes, isto é, para cada $q \in U$ se tem

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \neq (0, 0, 0),$$

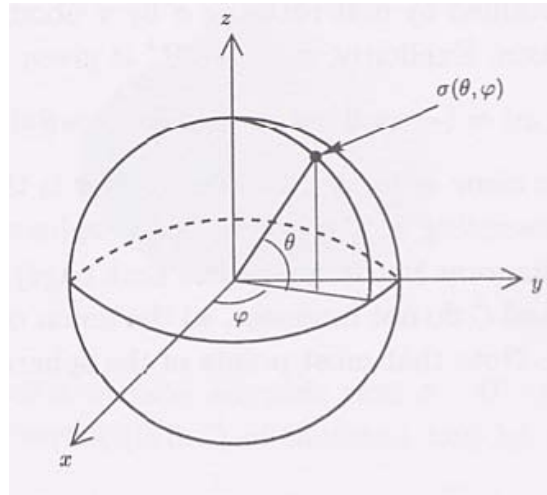
o que fornece um critério para aferir da regularidade da superfície S num ponto.

Exemplo 1.5.2 (i) Um plano Π em \mathbb{R}^3 é uma superfície com uma parametrização global. De facto, para P um ponto arbitrário do plano, considerem-se dois vectores do plano perpendiculares, $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$. Então, para qualquer ponto Q do plano, o respectivo vector $w = \overrightarrow{PQ}$ é uma combinação linear de u e v : $\lambda u + \mu v$ para alguns escalares λ e μ . Portanto $Q = P + \lambda u + \mu v$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

A parametrização é então dada pela função

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \Pi \subset \mathbb{R}^3 \\ (\lambda, \mu) &\mapsto P + \lambda u + \mu v. \end{aligned}$$

(ii) Um subconjunto aberto de um plano de \mathbb{R}^3 é uma superfície.



Parametrização da esfera

Exemplo 1.5.3 *A superfície esférica de raio unitário*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

é uma superfície já conhecida. Uma primeira ideia para parametrização consiste em recorrer à latitude θ e à longitude φ :

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta).$$

Não se pode considerar σ definida em \mathbb{R}^2 , pois nesse caso não seria injectiva. Para cobrir toda a esfera bastaria considerar

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (1.5.1)$$

Contudo este conjunto não forma um aberto de \mathbb{R}^2 pelo que não pode ser usado como domínio da parametrização. O maior conjunto aberto de \mathbb{R}^2 que verifica a Definição 1.5.1 e é consistente com (1.5.1), será

$$U = \left\{ (\theta, \varphi) : -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi \right\}. \quad (1.5.2)$$

Mas, agora, $\sigma(U)$ não contém toda a superfície esférica, mas apenas

$$S \setminus \{(x, y, z) \in S : x \geq 0, y = 0\}.$$

Ou seja, não contem os pontos da semicircunferência \mathcal{C} de S do tipo $(x, 0, z)$ com $x \geq 0$, pelo que $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ cobre apenas uma parte da esfera.

A função σ é um homeomorfismo suave de U na intersecção da esfera com o aberto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0 \vee y = 0\}.$$

Para verificar a regularidade de σ calcula-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} &= (-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} &= (-\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, 0), \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} &= (-\cos^2 \theta \cos \varphi, -\cos^2 \theta \sin \varphi, -\sin \theta \cos \theta). \end{aligned}$$

Como $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tem-se

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \right\| = \sqrt{\cos^4 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \sqrt{\cos^2 \theta} = |\cos \theta| \neq 0,$$

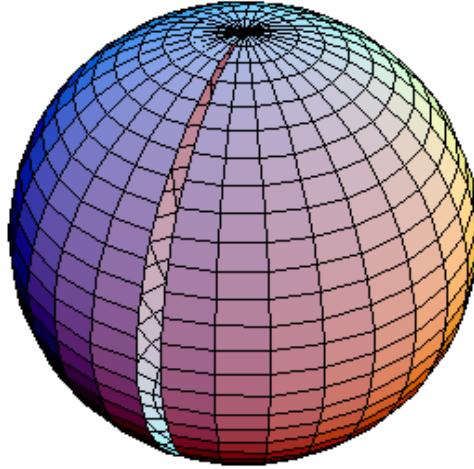
isto é, $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \neq (0, 0, 0)$.

Para se cobrir toda a superfície esférica S , é necessário apresentar, pelo menos, mais uma parametrização de S que cubra a parte omitida por σ .

Por exemplo, considere-se a parametrização $\bar{\sigma}$ obtida de σ por uma composição de rotações: uma de amplitude π em torno do eixo OZ (que aplica (x, y, z) em $(-x, -y, z)$) seguida de outra de amplitude $\pi/2$ em torno do eixo OX (que aplica $(-x, -y, z)$ em $(-x, -z, -y)$). Formalizando a função $\bar{\sigma}$ tem-se

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} : U &\longrightarrow S \cap \bar{V} \\ (\theta, \varphi) &\longmapsto (-\cos \theta \cos \varphi, -\sin \theta, -\cos \theta \sin \varphi), \end{aligned}$$

sendo U dado por (1.5.2) e $\bar{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \vee z \neq 0\}$.



Esfera cortada

A imagem de $\bar{\sigma}$ é o complementar da semi-circunferência \bar{C} formada pelos pontos de S da forma $(x, y, 0)$ com $x \leq 0$.

Note-se que a reunião das imagens de σ e $\bar{\sigma}$ dá a totalidade da superfície esférica S e que a maioria dos pontos de S está na imagem de ambas as parametrizações.

O próximo resultado fornece um processo genérico de obter superfícies:

Proposição 1.5.4 *Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Então o gráfico de f*

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\} \quad (1.5.3)$$

é uma superfície.

Dem. A função

$$\begin{aligned} \sigma : \quad U &\rightarrow G_f \\ (x, y) &\mapsto (x, y, f(x, y)). \end{aligned}$$

é uma parametrização global de G_f , pois:

- é bijectiva e suave;
- $\sigma^{-1} : G_f \rightarrow U$ é contínua pois é a restrição a G_f da projecção $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $(x, y, z) \mapsto (x, y)$;
- $J_\sigma(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$ tem característica 2.

■

No exemplo da superfície esférica construímos duas parametrizações por métodos "intuitivos". O próximo resultado fornece condições a seguir para se construir uma, ou mais, parametrizações para uma superfície.

Comecemos com alguns conceitos:

Definição 1.5.5 *Chama-se **superfície de nível** S ao conjunto de pontos definidos por equações da forma $f(x, y, z) = k$ com $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e $k \in \mathbb{R}$. Isto é,*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = k\}.$$

Contudo nem sempre os conjuntos anteriores definem uma superfície. Há que exigir regularidade:

Definição 1.5.6 *Um número real a diz-se um **valor regular** de $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ se, para cada $p \in f^{-1}(a)$, o gradiente não se anula:*

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right) \neq (0, 0, 0).$$

Teorema 1.5.7 *Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Se $a \in f(U)$ é um valor regular de f então $S = f^{-1}(a)$ é uma superfície.*

Dem. Seja $p \in S = f^{-1}(a) \subseteq U$. Por hipótese,

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right) \neq (0, 0, 0).$$

Suponha-se então que $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ (a prova é igual nos outros dois casos). Provar-se-á o teorema, apresentando uma aplicação $\sigma : \tilde{U} \rightarrow W \subseteq S$ de uma região aberta W de S contendo o ponto p .

Comece-se por considerar a função

$$\begin{aligned} F : \quad U &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, f(x, y, z)). \end{aligned}$$

A matriz jacobiana de F em p ,

$$J_F(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(p) & \frac{\partial f}{\partial y}(p) & \frac{\partial f}{\partial z}(p) \end{bmatrix},$$

é invertível, uma vez que $|J_F(p)| = \left| \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right| \neq 0$. Então, pelo Teorema da Função Inversa, existem conjuntos abertos V e \tilde{V} de \mathbb{R}^3 , contendo p e $F(p)$, respectivamente, tais que $F : V \rightarrow \tilde{V}$ é bijetiva e $F^{-1} : \tilde{V} \rightarrow V$ é suave.

Suponha-se $F^{-1} = (f_1, f_2, f_3)$. Então $f_1(x, y, z) = x$, $f_2(x, y, z) = y$ e $f_3 : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}$ é suave. Compondo f_3 com a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $\varphi(x, y) = (x, y, a)$, obtem-se a função suave

$$\begin{aligned} h := f_3 \circ \varphi : \quad \varphi^{-1}(\tilde{V}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f_3(x, y, a). \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.5.4, G_h é uma superfície, que tem como parametrização global

$$\begin{aligned} \sigma : \quad \varphi^{-1}(\tilde{V}) &\rightarrow G_h \\ (x, y) &\mapsto (x, y, h(x, y)) = (x, y, f_3(x, y, a)), \end{aligned}$$

o que é suficiente para a demonstração, pois:

- $\tilde{U} := \varphi^{-1}(\tilde{V})$ é um aberto de \mathbb{R}^2 ;

- $W = G_h$ é um aberto de S contendo p , pois $G_h = S \cap V$.

Para provar esta desigualdade, comece-se por justificar a primeira inclusão:

Seja $(x, y, z) \in G_h$. Então $z = f_3(x, y, a)$ e $(x, y, z) = (x, y, f_3(x, y, a)) = F^{-1}(x, y, a) \in V$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}(x, y, a) &= F(F^{-1}(x, y, a)) = F(x, y, f_3(x, y, a)) \\ &= F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)),\end{aligned}$$

pelo que $a = f(x, y, z)$, ou seja, $(x, y, z) \in f^{-1}(a) = S$.

Para a inclusão contrária, seja $(x, y, z) \in S \cap V$. Então

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= F^{-1}(F(x, y, z)) = F^{-1}(x, y, f(x, y, z)) \\ &= F^{-1}(x, y, a) = (x, y, f_3(x, y, a)),\end{aligned}$$

pelo que $z = f_3(x, y, a) = h(x, y)$. Logo $(x, y, z) \in G_h$.

■

Como se poderá "mudar" de parametrização numa superfície?

Proposição 1.5.8 *Sejam U e \bar{U} dois conjuntos abertos de \mathbb{R}^2 e $\sigma : U \rightarrow V \subseteq S$ uma parametrização (regular, suave) de S . Se $\phi : \bar{U} \rightarrow U$ é um homeomorfismo suave com ϕ^{-1} suave, então $\bar{\sigma} := \sigma \circ \phi : \bar{U} \rightarrow V \subseteq S$ é também uma parametrização de S .*

Dem. A função $\bar{\sigma}$ é suave porque a composição de funções suaves é ainda uma função suave.

Para provar a regularidade de $\bar{\sigma}$, seja $(u, v) = \phi(\bar{u}, \bar{v})$. Como $\bar{\sigma} = \sigma \circ \phi$, então

$$J_{\bar{\sigma}}(\bar{u}, \bar{v}) = J_{\sigma}(u, v) \cdot J_{\phi}(\bar{u}, \bar{v}).$$

Portanto

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x}(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(\bar{u}, \bar{v}) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}(u, v) + \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(\bar{u}, \bar{v}) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial y}(u, v)$$

e

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial y}(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(\bar{u}, \bar{v}) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}(u, v) + \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(\bar{u}, \bar{v}) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial y}(u, v).$$

Então

$$\begin{aligned}& \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x}(\bar{u}, \bar{v}) \wedge \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial y}(\bar{u}, \bar{v}) \\ &= \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(\bar{u}, \bar{v}) \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(\bar{u}, \bar{v}) - \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(\bar{u}, \bar{v}) \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(\bar{u}, \bar{v}) \right) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(u, v) \\ &= \det(J_{\phi}(\bar{u}, \bar{v})) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(u, v).\end{aligned}$$

Como ϕ é um homeomorfismo, $J_{\phi^{-1}} = (J_{\phi})^{-1}$. Em particular, a matriz J é invertível, ou seja, o seu determinante é diferente de zero. Portanto

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x}(\bar{u}, \bar{v}) \wedge \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial y}(\bar{u}, \bar{v}) \neq (0, 0, 0).$$

■

1.6 Plano tangente e recta normal a uma superfície. Orientabilidade

Uma possibilidade de estudar uma superfície S será estudar curvas cujas imagens estejam contidas em S .

Se a imagem de $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$ está contida na imagem de uma parametrização $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S , então existe uma aplicação

$$\begin{aligned}]a, b[&\rightarrow U \\ t &\mapsto (u(t), v(t)) \end{aligned}$$

com $u, v :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ funções suaves tal que

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)). \quad (1.6.1)$$

Assim diz-se que uma **curva** $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$ **está (contida) em S** se existir uma parametrização $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S tal que $\gamma(]a, b[) \subset \sigma(U)$.

O espaço tangente a S num ponto define-se com auxílio de vectores tangentes a S nesse ponto:

Definição 1.6.1 *Um **vector tangente** a S num ponto $p \in S$ é um vector tangente a alguma curva em S que passa por p . Assim, v é tangente a S em p se existir uma curva γ em S tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$, para algum t_0 no domínio de γ .*

Proposição 1.6.2 *O conjunto dos vectores tangentes a S em $p = \sigma(q)$ coincide com o subespaço vectorial de \mathbb{R}^3 gerado pelos vectores*

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \text{ e } \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q),$$

*que se designa por **espaço tangente** ou **plano tangente** de S em p .*

Dem. Seja v um vector tangente a S em p e seja $\sigma : U \rightarrow W \subseteq S$ uma parametrização de S contendo o ponto p . Então existe uma curva $\gamma :]a, b[\rightarrow W$ tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$. Consideremos a composição

$$]a, b[\xrightarrow{\gamma} W \xrightarrow{\sigma^{-1}} U \xrightarrow{\sigma} W.$$

Representando $\sigma^{-1} \circ \gamma$ por $\bar{\gamma}$, tem-se $J_\gamma(t_0) = J_\sigma(q) \cdot J_{\bar{\gamma}}(t_0)$, isto é,

$$\begin{bmatrix} \gamma'_1(t_0) \\ \gamma'_2(t_0) \\ \gamma'_3(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(q) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(q) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(q) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\gamma}'_1(t_0) \\ \bar{\gamma}'_2(t_0) \end{bmatrix}$$

e

$$v = \bar{\gamma}'_1(t_0) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + \bar{\gamma}'_2(t_0) \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q).$$

Reciprocamente, seja

$$v = c_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + c_2 \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)$$

e defina-se

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto q + t(c_1, c_2). \end{aligned}$$

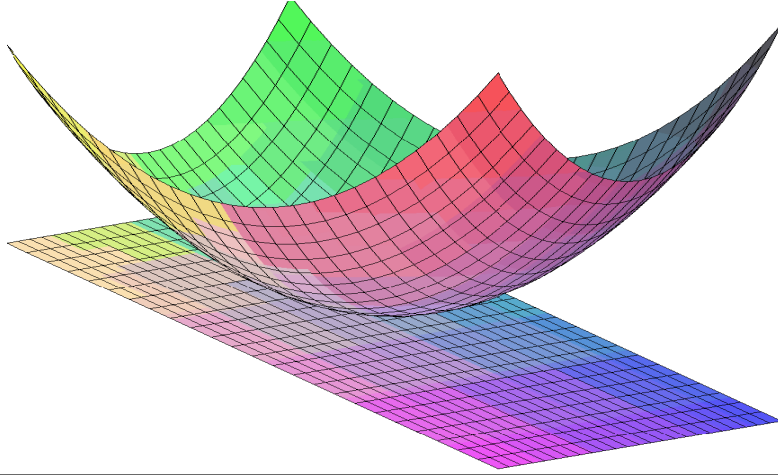
Esta função é suave, contínua em $t = 0$ e $\bar{\gamma}(0) = q \in U$, sendo U um aberto de \mathbb{R}^2 . Assim, existe $\epsilon > 0$ tal que $\bar{\gamma}(]-\epsilon, \epsilon[) \subseteq U$. Portanto, se se considerar a restrição de $\bar{\gamma}$ ao intervalo $]-\epsilon, \epsilon[$, pode-se efectuar a composição com o mapa de S e obter uma curva $\gamma = \sigma \circ \bar{\gamma}$ em S que passa por p (pois $\gamma(0) = p$):

$$]-\epsilon, \epsilon[\xrightarrow{\bar{\gamma}} U \xrightarrow{\sigma} W \subseteq S.$$

Como $\gamma(0) = \sigma(\bar{\gamma}(0)) = \sigma(q) = p$, $\bar{\gamma}'_1(0) = c_1$ e $\bar{\gamma}'_2(0) = c_2$, tem-se $J_\gamma(0) = J_\sigma(q) \cdot J_{\bar{\gamma}}(0)$, isto é,

$$\gamma'(0) = c_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + c_2 \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) = v$$

e, portanto, v é tangente a S em p . ■



Plano tangente

Assim o plano tangente de S em p fica definido como o conjunto

$$T_p S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = p + \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) + \mu \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q), \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1.6.2)$$

Este plano fica completamente determinado por um vector unitário que lhe seja perpendicular, chamado **vector normal unitário** de S em p ($N_\sigma(p)$) dado pela expressão

$$N_\sigma(p) = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right\|}.$$

Ao contrário do plano tangente, o vector normal não é independente da escolha da parametrização de S . De facto, designando por $\bar{\sigma} : \bar{U} \rightarrow S$ uma outra parametrização de S tal que $\bar{\sigma}(\bar{q}) = p$ tem-se

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x}(\bar{q}) \wedge \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial y}(\bar{q}) = \det(J_\phi(\bar{q})) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right),$$

sendo $\phi = \sigma^{-1} \circ \bar{\sigma}$ a mudança de coordenadas de $\bar{\sigma}$ para σ .

Calculando o vector $N_{\bar{\sigma}}(p)$ obtem-se

$$N_{\bar{\sigma}}(p) = \frac{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x}(\bar{q}) \wedge \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial y}(\bar{q})}{\left\| \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x}(\bar{q}) \wedge \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial y}(\bar{q}) \right\|} = \pm \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) \right\|} = \pm N_\sigma(p),$$

sendo o sinal o indicado por $\det(J_\phi(\bar{q}))$.

Este facto conduz-nos à definição de superfície orientável:

Definição 1.6.3 *Sejam σ e $\bar{\sigma}$ duas parametrizações da superfície S e $\phi = \sigma^{-1} \circ \bar{\sigma}$ a mudança de coordenadas de $\bar{\sigma}$ para σ . A superfície S diz-se **orientável** se $\det(J_\phi(\bar{q})) > 0$ em qualquer ponto \bar{q} do domínio de ϕ . Caso contrário a superfície diz-se **não orientável**.*

Numa superfície orientável existe uma parametrização que permite a escolha de um vector normal unitário $N(p)$, em cada ponto p . Portanto, existe uma função suave $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\|N(p)\| = 1$ e $N(p) \in (T_p S)^\perp$ para cada $p \in S$, que se designa por **campo de vectores normais unitários** em S .

Assim está justificada o resultado seguinte:

Proposição 1.6.4 *Uma superfície S é orientável se e só se possui um campo de vectores normais unitários $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$.*

Note-se que se $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo de vectores normais unitários de uma superfície S então $-N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ também constitui um campo de vectores normais unitários de S .

Assim, numa superfície orientável S existem pelo menos duas orientações distintas, isto é, dois campos de vectores normais unitários.

Exemplo 1.6.5 *Seja S o plano horizontal*

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}.$$

Então existem duas possíveis escolhas para N :

$$N(x, y, z) = (0, 0, 1), \quad \forall (x, y, z) \in H,$$

e

$$N(x, y, z) = (0, 0, -1), \quad \forall (x, y, z) \in H.$$

Exemplo 1.6.6 *Qualquer superfície que admita uma parametrização global é orientável. Em particular, qualquer gráfico G_f dado por (1.5.3) é uma superfície orientável.*

Para funções suaves e para valores regulares pode-se mesmo conseguir uma regra prática para obter um campo de vectores normais unitários:

Exemplo 1.6.7 *Sejam a um valor regular de $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e S uma superfície do tipo $f^{-1}(a)$. Neste caso, para cada parametrização $\sigma : \bar{U} \rightarrow W \subseteq S$, $f \circ \sigma$ é constante ($f(\sigma(x)) = a, \forall x \in \bar{U}$) pelo que*

$$J_{f(p)} \cdot J\sigma(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

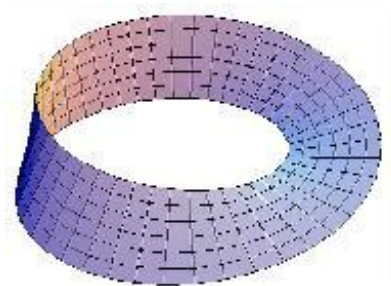
para cada $p = \sigma(q) \in W$. Como $Jf(p) = \nabla f(p)$ tem-se

$$\nabla f(p) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial x}(q) = 0 \quad e \quad \nabla f(p) \mid \frac{\partial \sigma}{\partial y}(q) = 0,$$

pelo que $\nabla f(p) \in (T_p S)^\perp$ e pode-se escolher

$$N(p) := \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}.$$

Assim toda a superfície deste tipo (como, por exemplo, os toros, os elipsóides, os hiperbolóides, etc.) é orientável.



Fita de Möbius

Exemplo 1.6.8 *A **fita de Möbius** é a superfície que se obtém rodando um segmento de recta L em torno do seu ponto médio P ao mesmo tempo que P se move ao longo de uma circunferência \mathcal{C} , de tal modo que enquanto P dá uma volta à circunferência \mathcal{C} , L dá meia volta em torno de P .*

Pode-se facilmente construir uma fita de Möbius unindo as pontas de uma tira de papel após termos rodado a tira segundo um ângulo de 180 graus.

Considerando C a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no plano XOY e para L o segmento de comprimento 1 paralelo ao eixo OZ e com ponto médio $P = (1, 0, 0)$ então, após P ter rodado θ radianos em torno de OZ , L terá rodado $\frac{\theta}{2}$ radianos em torno de P (no plano contendo P e o eixo OZ). O ponto L

inicialmente em $(1, 0, t)$ passará, após essa rotação de amplitude θ , para o ponto

$$\sigma(t, \theta) = \left(\left(1 - t \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\right) \cos \theta, \left(1 - t \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen} \theta, t \cos \frac{\theta}{2} \right).$$

A fita de Möbius é um exemplo de uma superfície não orientável.

1.7 Exercícios

1. Determine parametrizações $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ das seguintes curvas de nível:

(a) **Circunferência** $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$.

(b) **Hipérbole** $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 = 1, y > 0\}$.

(c) **Elipse** $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$.

2. Indique as equações cartesianas dos traços $\gamma(\mathbb{R})$ das curvas planas definidas pelas seguintes parametrizações:

(a) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$.

(b) $\gamma(t) = (e^t, t^2)$.

(c) $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

3. Determine as rectas tangentes às curvas dadas nos pontos indicados:

(a) $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 \sin(\frac{t}{2}))$, $t = \pi$.

(b) $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (e^{-t}, t^2, 5 + t)$, $t = 0$.

4. Calcule o comprimento de arco das seguintes curvas:

(a) **Espiral logarítmica:** $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, a partir do ponto $\gamma(0) = (1, 0)$.

(b) **Catenária:** $\gamma(t) = (t, \cosh t)$, a partir do ponto $(0, 1)$.

(c) **Ciclóide:** $\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$ correspondente a uma revolução completa da circunferência.

5. Prove que a função comprimento de arco dada por (1.3.2) é uma função monótona crescente.

6. Mostre que as seguintes funções são mudanças de parâmetro:

(a) $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow]0, 1[$ definida por $\varphi(t) = \frac{t^2}{t^2+1}$.

(b) $\varphi :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(t) = \tan(\frac{\pi}{2}t)$.

7. Quais das seguintes curvas são regulares?

(a) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$ para $t \in \mathbb{R}$.

(b) Curva da alínea anterior para $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

(c) $\gamma(t) = (t, \cosh t)$ para $t \in \mathbb{R}$.

Determine reparametrizações por comprimento de arco para as que forem regulares.

8. Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$.

(a) Reparametrize-a por comprimento de arco.

(b) Calcule o comprimento de arco de γ em $[0, \pi]$.

9. Dois pontos consecutivos numa hélice circular γ com a mesma projecção no plano XOY definem um arco, **espira da hélice**, e a distância entre estes dois pontos designa-se por **passo da hélice**.

Determine o comprimento da espira e o passo da hélice $\gamma : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\gamma_{a,b}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

10. Determine as curvaturas das curvas:

(a) $\gamma(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$

(b) $\gamma(t) = \left(\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right)$

(c) $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

Neste caso (**astróide**) qual o comportamento da curvatura na vizinhança dos pontos $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$?

11. Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$. Mostre que $\kappa = \tau$.

12. As curvas seguintes estão parametrizadas por comprimento de arco. Calcule o respectivo triedro de Frenet-Serret:

(a) $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(s) = \left(\frac{5}{13} \cos s, \frac{18}{13} - \sin s, -\frac{12}{13} \cos s \right);$

(b) $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(s) = \left(\frac{(1+s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{(1-s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right).$

13. Considere um movimento circular planar $\gamma : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$\gamma(\theta) = (a + r \cos(f(\theta)), b + r \sin(f(\theta))),$$

para $a, b \in \mathbb{R}, r > 0$ e f uma função suave.

A expressão $f'(\theta)$ designa-se por **velocidade angular** da partícula durante o movimento circular.

Mostre que num movimento circular no plano, com velocidade angular constante, o vector aceleração é perpendicular ao vector velocidade.

14. Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva definida por $\gamma(t) = (1+t, -t^2, 1+t^3)$. Determine a recta tangente e o plano normal a γ em cada ponto $\gamma(t)$.

15. Sejam $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ curvas dadas por $\alpha(t) = (t, t^2, 0)$ e $\beta(t) = (t, -\frac{t^2}{2}, 0)$. Determine todos os valores reais t nos quais a recta tangente a α em $\alpha(t)$ e a recta normal a β em $\beta(t)$ têm a mesma direcção.

16. Para a hélice circular $\gamma_{a,b}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, determine:

- a) A recta binormal em cada ponto $\gamma_{a,b}(t)$;
- b) O plano rectificante em $\gamma_{a,b}(t)$.

17. Indique a equação do plano osculador às curvas dadas nos pontos referidos:

- a) $\gamma(t) = (\sin t, t, 1 - \cos t)$ para $t = \pi$;
- b) $\gamma(t) = (t, t^3, \sin t)$ para $t = 0$.

18. Considere o conjunto $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : yx^2 + y^2 = 1\}$.

- a) Justifique que C é uma superfície.
- b) Determine uma equação do plano tangente a C em $p = (0, 1, 2)$.

19. Para a função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2y^2$.

- a) Determine o conjunto dos valores regulares de f .
- b) Prove que qualquer plano tangente a

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2y^2 = c, c \in \mathbb{R}^+\}$$

é paralelo à recta $x = 1, y = 2$.

20. Prove que qualquer plano Π em \mathbb{R}^3 é uma superfície suave regular.

21. Um **cilindro parabólico** pode ser representado por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2\}.$$

- a) Prove que S pode ser coberta por uma única parametrização.

b) Determine a recta normal a S na origem $(0, 0, 0)$.

22. Considere o **cilindro elíptico**

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0 \right\}$$

a) Prove que o plano tangente a S nos pontos da recta

$$R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x_0, y = y_0, \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \right\}$$

permanece constante.

b) Mostre que qualquer normal a S é paralela ao plano de equação $z = 0$.

23. Determine um vector normal à superfície parametrizada por

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

no ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4} \right)$.

1.8 Actividades

Actividade 1:

Considere $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Prove que:

a) Se o vector tangente a γ é constante então o traço de γ é (parte de) uma recta.

b) Se a curvatura de γ nunca se anula então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) γ é plana (ou seja, a sua imagem $\gamma(I)$ está contida num plano);

(ii) para cada $t \in I$, $\tau(t) = 0$.

Actividade 2:

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular.

1. Prove que não é possível utilizar a Definição 1.4.2 se γ não estiver parametrizada por comprimento de arco, pois, neste caso, a curvatura dependeria da parametrização.

2. Mostre que a curvatura de γ não depende da parametrização por comprimento de arco utilizada.

3. Se γ definir uma trajectória prove que a velocidade da partícula depende da parametrização

Actividade 3:

Considere a fita de Möbius referida no Exemplo 1.6.8.

1. Comente a afirmação:

"Um atleta que percorresse toda a fita de Möbius com o testemunho na mão direita à partida, tê-lo-ia na mão esquerda à chegada."

Obs.: Exclui-se o caso da mudança voluntária de mão.

2. Prove que a fita de Möbius não é uma superfície orientável.

3. Mostre que o vector normal unitário de S em p , $N_\sigma(p)$, para $p = \sigma(0, \theta)$, é dado por

$$N_\sigma(p) = \left(-\cos \theta \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right).$$

4. Verifique que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} N_{\sigma}(p) = (-1, 0, 0) \quad \text{e} \quad \lim_{\theta \rightarrow 2\pi} N_{\sigma}(p) = (1, 0, 0).$$

5. Justifique que a alínea anterior permite também concluir que fita de Möbius não é uma superfície orientável e relacione-a com a afirmação apresentada em 1.

Capítulo 2

Introdução à Análise Complexa

Neste capítulo pretende-se que o aluno:

- Domine a estrutura algébrica do conjunto dos números complexos \mathbb{C} .
- Compreenda as semelhanças e as peculiaridades das funções complexas relativamente às funções reais de variável real.
- Entenda a diferenciabilidade de funções complexas, o conceito de analiticidade e respectivas propriedades.
- Utilize condições necessárias e/ou suficientes de analiticidade de funções complexas.
- Associe as funções harmónicas às suas aplicações na Ciência.
- Conheça funções complexas elementares (exponencial, trigonométricas, hiperbólicas, logaritmo, potenciação generalizada,...) e respectivas propriedades.
- Interprete as transformações geométricas mais importantes associadas às funções complexas elementares.
- Determine transformados de conjuntos em \mathbb{C} por intermédio de funções de variável complexa.
- Compreenda a utilidade das transformações conformes.

- Calcule integrais de caminho no plano complexo e conheça as suas propriedades.
- Aplique o Teorema de Cauchy no cálculo de integrais complexos.
- Conheça as potencialidades da fórmula integral de Cauchy e das aplicações ao cálculo integral: cálculo do índice, estimação da função e das suas derivadas, teoremas de Liouville e do módulo máximo,...

2.1 Generalidades sobre o conjunto dos números complexos, \mathbb{C}

Rever conceitos sobre números complexos e suas propriedades, já adquiridos no Ensino Secundário, nomeadamente :

- definição e representação na forma algébrica: $z = x + iy$;
- estrutura algébrica: adição, multiplicação, subtração, divisão;
- representação geométrica: plano complexo;
- números complexos conjugados; módulo de um número complexo; propriedades;
- forma polar ou trigonométrica de um complexo;
- operações com complexos na forma polar; potenciação e radiciação.

2.2 Funções complexas e funções analíticas

Algumas propriedades das funções reais de variável real, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mantêm-se no estudo das funções complexas de variável complexa.

Uma primeira diferença básica está relacionada com o domínio. Enquanto no primeiro caso a função estava, geralmente, definida num intervalo (ou reunião de intervalos), agora ter-se-á

$$f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

sendo $D \subseteq \mathbb{C}$ o **domínio** da função f e $f(D)$ o seu **contradomínio**.

Como $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, f pode ser entendida como uma função vectorial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, se for escrita na forma

$$w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y),$$

sendo $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais.

Exercício 2.2.1 *Seja a função $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2 + 2z - 4 + i$.*

- Determine o domínio D de f .*
- Calcule $f(1 + 3i)$*
- Indique $\operatorname{Re}(f(z))$ e $\operatorname{Im}(f(z))$.*

As noções topológicas em \mathbb{C} são similares às utilizadas na Análise em \mathbb{R}^n . Por exemplo:

Definição 2.2.2 *Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$ e $\varepsilon > 0$. Chama-se **vizinhança** de z_0 de raio ε ao conjunto*

$$V_\varepsilon(z_0) \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Definição 2.2.3 *Um subconjunto $A \subset \mathbb{C}$ diz-se **aberto** sse*

$$\forall z_0 \in A, \exists \varepsilon > 0 : V_\varepsilon(z_0) \subset A.$$

Definição 2.2.4 *Considere $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $w_0 \in \mathbb{C}$. Diz-se que*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \text{ sse } \forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : 0 < |z - z_0| < \varepsilon \implies |f(z) - w_0| < \delta.$$

Observação 2.2.5 *Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w = a + bi$, então*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(x, y) = a \wedge \lim_{z \rightarrow z_0} v(x, y) = b.$$

As propriedades algébricas dos limites são também análogas ao caso real (vectorial), bem como o conceito de continuidade:

Definição 2.2.6 *Seja $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto e a função $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Diz-se que:*

(i) *f é contínua em $z_0 \in D$ sse $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.*

(ii) *f é contínua em D sse é contínua em cada ponto de D .*

Exercício 2.2.7 *Indique os pontos onde a função $f(z) = \frac{z^2+2z+1}{z^3+1}$ é contínua.*

O conceito de derivada de uma função de variável complexa, embora muito semelhante à derivada de uma função de variável real, é mais "rico". Veja-se porquê:

Definição 2.2.8 *Considere-se um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$. A **derivada** de $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ no ponto $z_0 \in D$, $f'(z_0)$ define-se por*

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

*desde que o limite exista, dizendo-se que f é **diferenciável** em z_0*

Observação 2.2.9 Notando $\Delta z = z - z_0$ então a definição pode ser escrita como

$$f'(z_0) := \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Observação 2.2.10 a) Nos limites anteriores o quociente referido é entre números complexos.

b) Os limites são considerados na perspectiva de cálculo vectorial, isto é, $z \rightarrow z_0$ é uma aproximação arbitrária e não numa direcção em particular.

c) A existência de $f'(z)$ permite tirar uma maior informação sobre a regularidade de f . Por exemplo, se $f'(z)$ existe, então também existem f'' , f''' , ..., o que não acontece no caso real. Veja-se o caso de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \leq 0 \\ -x^2 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

em que $f'(x) = 2|x|$ mas $f''(0)$ não existe.

Exercício 2.2.11 Mostre que $f(z) = z^2 + 3i + 1$ é diferenciável para todo $z \in \mathbb{C}$ e determine a expressão de $f'(z)$.

Observação 2.2.12 As regras de derivação em \mathbb{C} são análogas às do caso real e a sua demonstração é semelhante.

Proposição 2.2.13 Se f é diferenciável em z_0 então f é contínua em z_0 .

Dem. Para provar que f é contínua em z_0 basta justificar que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \text{ ou seja } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - f(z_0) = 0.$$

Assim

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - f(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \\ &= f'(z_0) \times 0 = 0. \end{aligned}$$

■

Existem em \mathbb{C} funções "simples" que não têm derivada em nenhum ponto:

Exercício 2.2.14 Prove que $f(z) = \bar{z}$ não admite derivada em nenhum ponto $z_0 \in \mathbb{C}$.

A diferenciabilidade de funções complexas exige "algum cuidado". Em que funções se "pode confiar"?

Definição 2.2.15 *Seja $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, com D um conjunto aberto.*

(i) *A função f diz-se **analítica** ou **holomorfa** em $z_0 \in D$ se $f(z)$ é diferenciável numa vizinhança de z_0 .*

(ii) *$f(z)$ é analítica em D se for analítica em todos os pontos de D .*

(iii) *$f(z)$ diz-se analítica se for analítica nalgum conjunto aberto D .*

Como exemplo refira-se que a função referida no Exercício 2.2.1 é analítica em \mathbb{C} .

Mais geralmente:

Exemplo 2.2.16 a) *As funções polinomiais $f(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n$, com $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, são analíticas em \mathbb{C} .*

b) *As funções racionais $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, com $g(z)$ e $h(z)$ funções polinomiais sem factores comuns, são funções analíticas em \mathbb{C} excepto nos pontos em que $h(z) = 0$.*

Exercício 2.2.17 *Prove que a função*

$$f(z) = \frac{iz + 2}{3z - 6i}$$

é analítica para todo o $z \in \mathbb{C}$.

Teorema 2.2.18 *Sejam $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ duas funções analíticas, A, B abertos com $f(A) \subseteq B$. Então a função composta $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $(g \circ f)(z) = g(f(z))$ é analítica em A e*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) f'(z).$$

Dem. Sejam $z, z_0 \in A$, com $f(z) = w$ e $f(z_0) = w_0$. Defina-se

$$h(w) = \begin{cases} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0) & , \quad w \neq w_0 \\ 0 & , \quad w = w_0. \end{cases}$$

Em primeiro lugar prove-se que h é contínua.

Para $w \neq w_0$, h está definida por uma função contínua logo é contínua.

Para $w = w_0$ tem-se

$$\lim_{w \rightarrow w_0} h(w) = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0) = 0.$$

Assim $\lim_{w \rightarrow w_0} h(w) = 0 = h(w_0)$, pelo que, h é contínua. Calcule-se agora

$$(g \circ f)'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{z - z_0}. \quad (2.2.1)$$

Como

$$h(f(z)) = \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} - g'(f(z_0))$$

então

$$g(f(z)) - g(f(z_0)) = [h(f(z)) + g'(f(z_0))][f(z) - f(z_0)]$$

e

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = [h(f(z)) + g'(f(z_0))] \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Por (2.2.1) vem

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left([h(f(z)) + g'(f(z_0))] \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} [h(f(z)) + g'(f(z_0))] \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= [0 + g'(f(z_0))] \cdot f'(z_0). \end{aligned}$$

Logo, se $z \in A$, então

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) f'(z).$$

■

2.3 Equações de Cauchy-Riemann

Um critério para aferir da analiticidade de uma função complexa

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

baseia-se nas equações de Cauchy-Riemann:

Teorema 2.3.1 *A função $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, com D um aberto e $z_0 \in D$, é analítica em $z_0 = x_0 + iy_0$ se, e só se, as derivadas parciais de 1ª ordem de u e v existem e satisfazem, em (x_0, y_0) , as equações de Cauchy-Riemann:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (\text{C-R})$$

Além disso, se $f'(z_0)$ existe então

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Dem. Por definição tem-se

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Se $z = x + y_0i$, obtem-se

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Por outro lado, se $z = x_0 + yi$, obtem-se

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{u(x_0, y) + iv(x_0, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} + \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} \\ &= \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Como o limite, quando existe, é único, por (2.3.1) e (2.3.2) tem-se que

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

ou seja

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Note-se ainda que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

■

Note-se que as equações (C-R) são condições necessárias para existir derivada.

Exemplo 2.3.2 Para a função $f(z) = |z|^2$ tem-se

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \quad e \quad v(x, y) = 0.$$

Então $f'(z_0)$ existe nos pontos em que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

isto é, a derivada $f'(z)$ apenas existe para $z = 0$.

Exemplo 2.3.3 Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & , \quad z \neq 0 \\ 0 & , \quad z = 0. \end{cases}$$

a) Verificar que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z}$ não existe.

b) Prove que $u(x, 0) = x$, $v(0, y) = y$, $u(0, y) = v(x, 0) = 0$.

c) Mostre que as equações (C-R) se verificam em $(x, y) = (0, 0)$, mas $f'(0)$ não existe.

Em que casos as equações de Cauchy-Riemann constituem mesmo uma condição suficiente de analiticidade?

Teorema 2.3.4 Se as funções $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ têm derivadas parciais de 1ª ordem contínuas que verificam as equações (C-R) num aberto D então a função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em D .

Dem. Como u e v são diferenciáveis, usando o teorema do valor médio para $(x, y), (x_0, y_0) \in D$, existe η entre (x, y) e (x_0, y_0) tal que

$$\begin{aligned} u(x, y) - u(x_0, y_0) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{(\eta)} \cdot (x - x_0, y - y_0) \\ v(x, y) - v(x_0, y_0) &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{(\eta)} \cdot (x - x_0, y - y_0) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Note que quando se $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ então $\eta \rightarrow (x_0, y_0)$.

Simultaneamente, $\nabla u(\eta) := \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{(\eta)} \rightarrow \nabla u(x_0, y_0)$ e $\nabla v(\eta) \rightarrow \nabla v(x_0, y_0)$, por serem contínuas, e as equações de Cauchy-Riemann implicam que $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial v}{\partial x} \right)$ e $\nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right)$.

Finalmente, aplicando o mesmo tipo de argumentos que em (2.3.1) e (2.3.2), tem-se que

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\eta)(x - x_0) - \frac{\partial v}{\partial x}(\eta)(y - y_0) \\ + i \frac{\partial v}{\partial x}(\eta')(x - x_0) + i \frac{\partial u}{\partial x}(\eta')(y - y_0) \end{pmatrix}}{(x - x_0) + i(y - y_0)} \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\eta)(x - x_0)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}(\eta')(y - y_0)^2 \\ + i \frac{\partial v}{\partial x}(\eta')(x - x_0)^2 + i \frac{\partial v}{\partial x}(\eta)(y - y_0)^2 \end{pmatrix}}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\
 &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),
 \end{aligned}$$

existe para todo $z_0 \in A$. ■

Exemplo 2.3.5 Verificar que $f(z) = z^3$ é uma função analítica em \mathbb{C} .

Definição 2.3.6 Uma função analítica em \mathbb{C} diz-se que é *inteira*.

Exercício 2.3.7 Mostre que as equações de Cauchy-Riemann para uma função definida em coordenadas polares

$$f(z) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta),$$

$\rho > 0$, são dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (2.3.4)$$

Prove ainda que $f'(z) = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + i \frac{\partial v}{\partial \rho} \right)$.

2.4 Equação de Laplace. Funções harmónicas

A importância prática de estudar Análise Complexa em Matemática aplicada à engenharia tem como base o facto de, quer a parte real, quer a parte imaginária de uma função analítica, verificarem uma das equações mais importantes da Física, a equação de Laplace, que ocorre na gravitação universal, electrostática, fluxo de fluidos, condução de calor,...

Definição 2.4.1 Considere-se um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Uma **função** $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^2(D)$, diz-se **harmónica** se for solução da **equação de Laplace** :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Ao operador diferencial Δ (também representado por ∇^2) dá-se o nome de **Laplaciano**.

Teorema 2.4.2 Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é uma função analítica num conjunto aberto em $D \subseteq \mathbb{C}$, então u e v são funções harmónicas em $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Dem. Como f é analítica verifica as condições de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Derivando a primeira em ordem a x e a segunda em ordem a y tem-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \text{ e } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Então

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

Analogamente se pode provar que v é uma função harmónica. ■

Se duas funções harmónicas u e v verificam as equações (C-R) num domínio D , então são a parte real e a parte imaginária de uma função analítica f ($f = u + iv$) em D . Neste caso v diz-se a **função harmónica conjugada** de u em D .

É possível encontrar uma das funções harmónicas conjugadas, dada uma delas, usando as equações de Cauchy-Riemann:

Exercício 2.4.3 Verifique que a função $u = x^2 - y^2 - y$ é harmónica nalgum domínio e determine a função harmónica conjugada. (Ap.15)

2.5 Geometria das funções analíticas. Transformação conforme

Como ter ideia do "gráfico" de uma função analítica? Que transformações geométricas opera uma aplicação analítica?

Para obter uma resposta às perguntas anteriores para uma função complexa

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

são necessários dois planos:

- o plano complexo, onde se representam os objectos z ;
- o plano UOV onde se representam as imagens $w = f(z)$.

Veja-se por exemplo, a função

$$w = f(z) = z^2.$$

Se a região a transformar for de "tipo circular" será conveniente utilizar coordenadas polares.

Assim, represente-se $z = \rho \operatorname{cis} \theta$ e $w = r \operatorname{cis} \varphi$. Então

$$w = r \operatorname{cis} \varphi = z^2 = \rho^2 (\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta)).$$

Comparando os módulos e os argumentos tem-se $r = \rho^2$ e $\varphi = 2\theta$, pelo que:

- os círculos de raio ρ são transformados em círculos de raio $r = \rho^2$;
- os ângulos de amplitude θ são transformados em ângulos de amplitude $\varphi = 2\theta$.

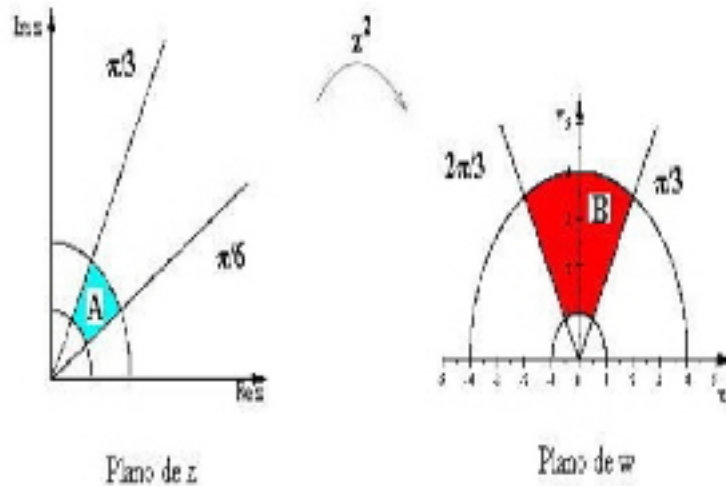
Por exemplo a região do plano complexo

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2 \wedge \frac{\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3} \right\}$$

é transformada, por meio de $f(z) = z^2$, em

$$B = \left\{ w \in \mathbb{C} : 1 \leq |w| \leq 4 \wedge \frac{\pi}{3} \leq \arg(w) \leq \frac{2\pi}{3} \right\},$$

como se ilustra na Figura:



Transformações de z^2 em coordenadas polares

Se for uma região de "tipo rectangular" utilizam-se coordenadas cartesianas, pelo que se notará $z = x + iy$ e $w = f(z) = u + iv$.

Neste caso

$$u = \operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad v = \operatorname{Im}(z^2) = 2xy.$$

As linhas verticais $x = k$ são transformadas em $u = k^2 - y^2$ e $v = 2ky$. Procurando uma expressão que relacione u com v , obtem-se

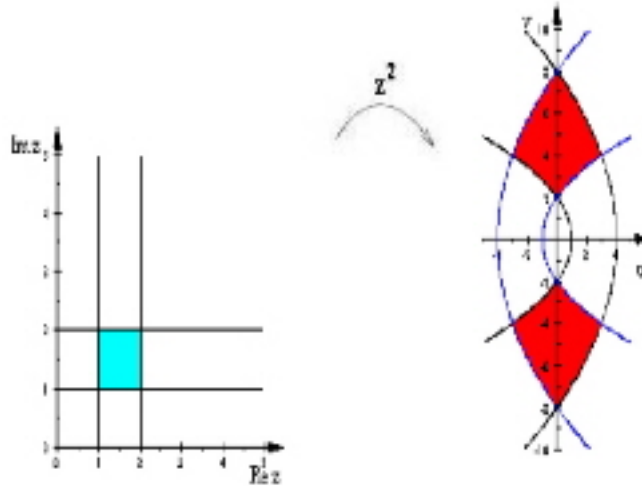
$$v^2 = 4k^2 (k^2 - u).$$

Isto é, são transformadas em parábolas centradas na horizontal.

Análogamente as rectas horizontais $y = k$ são transformadas em

$$v^2 = 4k^2 (k^2 + u).$$

A transformação pode ilustrar-se com a Figura:



Transformações de z^2 em coordenadas cartesianas

Em cada ponto, uma função conforme "roda" e "alonga" da mesma forma vectores tangentes às curvas.

Por exemplo, a aplicação linear tangente num ponto $z \in A$, $f' : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por $w \mapsto f'(z) w = r e^{i\theta} w$ com $r = |f'(z)|$ e $\theta = \arg(f'(z))$.

Desde que a derivada não se anule tem-se uma rotação de amplitude θ e uma contracção/expansão de razão $r > 0$.

São particularmente interessantes as **aplicações conformes**, isto é, aplicações que preservam os ângulos (orientação e amplitude) entre curvas orientadas (calculados entre vectores tangentes às curvas).

Teorema 2.5.1 *Uma função analítica $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ é conforme em todos os pontos de $D \subseteq \mathbb{C}$, excepto nos seus pontos críticos.*

Dem. Considere uma curva C que passe em z_0 .

A expressão

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

indica o vector tangente a C . A curva imagem de C , C^* , é $f(z(t))$. Pela derivada da função composta

$$w' = f'(z(t)) z'(t).$$

O ângulo da tangente de C^* é dado pelo argumento

$$\arg w' = \arg f' + \arg z'.$$

Então a aplicação derivada provoca, em cada ponto objecto z_0 , uma rotação dada pelo ângulo $\arg f'(z_0)$, no domínio de analiticidade de f , desde que $f'(z_0) \neq 0$. ■

Recorde-se que:

- Em \mathbb{R}^2 , uma curva orientada está associada a uma parametrização, pelo que o mesmo acontecerá em \mathbb{C} .
- O ângulo formado pela intersecção de duas curvas C_1 e C_2 define-se como o ângulo entre as tangentes orientadas, no ponto de intersecção.

Exemplo 2.5.2 A função $f(z) = z^n$ ($n \geq 2$) é conforme em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

As funções racionais da forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{com } a, b, c, d \in \mathbb{C},$$

são chamadas **transformações lineares fraccionárias** ou **transformações de Möbius**.

Proposição 2.5.3 Qualquer transformação de Möbius é conforme no seu domínio.

Dem. Seja $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $c \neq 0$ (o caso $c = 0$ é imediato). No seu domínio, $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, a função é analítica.

Como

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2},$$

se $ad = bc$ a transformação de Möbius é constante, logo é conforme.

Se $ad \neq bc$ então $f'(z) \neq 0$ e, pelo Teorema 2.5.1, f é conforme. ■

2.6 Funções complexas elementares

Nesta secção pretende-se abordar funções complexas básicas, mas indispensáveis em certas aplicações, que generalizam as funções elementares estudadas na Análise Real (basta considerar para tal $z = x$). Contudo, algumas propriedades nem sempre são "intuitivas" e apresentam diferenças com o caso real.

2.6.1 Função exponencial

Uma das funções complexas mais importantes é a função exponencial complexa, representada por e^z ou $\exp(z)$. Como definir então e^z ?

Partindo do caso real (série de Taylor)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

obtem-se, para $z \in \mathbb{C}$ com $z = x + yi$,

$$\begin{aligned} e^z &= e^x e^{iy} = e^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \right) \\ &= e^x \left[\left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \dots \right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots \right) \right] \\ &= e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) \end{aligned}$$

o que permite definir a exponencial e^z em termos de $\cos y$ e $\operatorname{sen} y$ (o que não acontece no caso real).

Definição 2.6.1 Para $z \in \mathbb{C}$ escrito na forma $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se

$$e^z = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Observa-se de imediato que se $\operatorname{Im} z = y = 0$ então obtem-se a função exponencial real.

Para $\operatorname{Re} z = x = 0$, obtem-se a **fórmula de Euler**

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y, \quad (2.6.1)$$

que conduz a resultados surpreendentes:

Exercício 2.6.2 Prove que:

$$e^{2\pi i} = 1, \quad e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i, \quad e^{-\pi i} = -1.$$

As principais propriedades da exponencial complexa são resumidas na seguinte proposição, cuja demonstração se deixa como exercício:

Proposição 2.6.3 Seja $z \in \mathbb{C}$ escrito na forma $z = x + yi$.

1. e^z é uma função inteira (é analítica para qualquer $z \in \mathbb{C}$).

2. $(e^z)' = e^z$
3. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
4. $|e^z| = e^x, \arg(e^z) = y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
5. $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

A partir da Definição 2.6.1 e das propriedades anteriores pode relacionar-se a representação trigonométrica de um complexo, $z = \rho \operatorname{cis} \theta$, com as coordenadas polares em \mathbb{R}^2 , de modo a obter a **representação polar** de um complexo

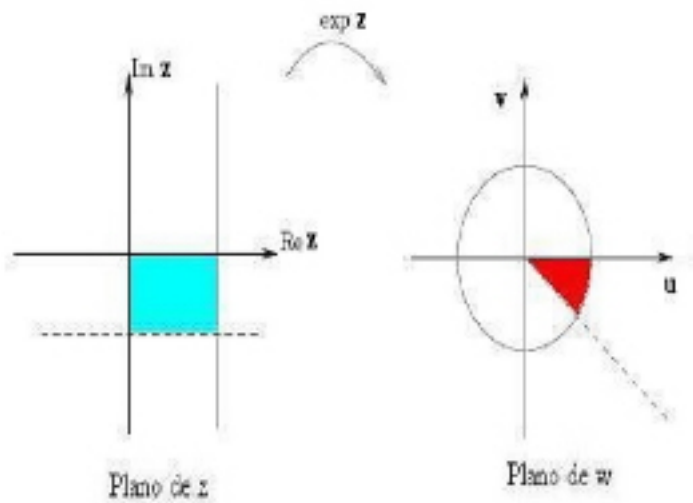
$$z = \rho e^{i\theta}. \quad (2.6.2)$$

Esta relação entre um número complexo e as correspondentes coordenadas polares indicia o tipo de transformações geométricas realizadas pela função exponencial complexa:

A função $f(z) = e^z$ aplica:

- rectas verticais $x = x_0$ em circunferências $|w| = e^{x_0}$;
- rectas horizontais $y = y_0$ em semi-rectas $\arg w = y_0$, como se ilustra na

Figura:



Transformações por e^z

Uma diferença fundamental entre a exponencial complexa e a exponencial real tem a ver com a periodicidade:

Proposição 2.6.4 A função e^z é uma função periódica de período $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, i.e.,

$$e^{z+2k\pi i} = e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

O período minimal é de $2\pi i$.

Dem. Suponhamos que $e^{z+w} = e^z$, $\forall z \in \mathbb{C}$, isto é, $e^w = 1$.

Considerando $w = s + ti$, tem-se

$$e^s \cos t + ie^s \sin t = 1,$$

pelo que

$$e^s \cos t = 1 \quad \text{e} \quad e^s \sin t = 0.$$

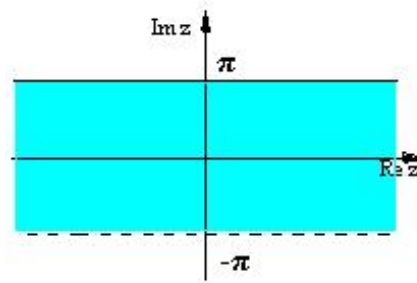
Como a primeira igualdade é positiva então, de $\sin t = 0$ conclui-se que $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e $e^s = 1$, isto é, $s = 0$.

Assim $w = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, i.e, o período de e^z é $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

Todos os valores possíveis que e^z pode assumir são obtidos na faixa horizontal, de amplitude 2π ,

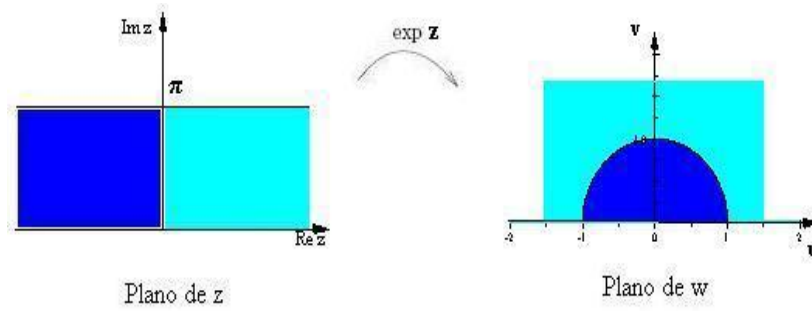
$$-\pi < y \leq \pi,$$

designada por **região fundamental** de e^z .



Região fundamental de e^z

A função $w = e^z$ aplica de uma forma bijectiva a região fundamental em todo o plano \mathbb{C} , tal como é ilustrado na Figura:

Transformação da região fundamental de e^z

Por exemplo:

- a região $0 < y \leq \pi$ é transformada no semi-plano $0 < \arg w \leq \pi$;
- a parte esquerda da região $x \leq 0$ é aplicada no círculo unitário $|w| \leq 1$ (porque $e^x \leq 1$) e aparte da direita, $x > 0$, no exterior, $|w| > 1$.

2.6.2 Funções trigonométricas e hiperbólicas

Tal como no caso da exponencial, as funções trigonométricas complexas generalizam as funções reais correspondentes. A ligação entre umas e outras pode estabelecer-se com recurso a (2.6.1), escrevendo-a, agora, na forma

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x. \quad (2.6.3)$$

Adicionando, ou subtraindo, ambas as igualdades obtêm-se expressões para o co-seno e o seno "reais", que sugerem, para as correspondentes funções complexas, a definição:

Definição 2.6.5 Para $z \in \mathbb{C}$, $z = x + yi$, define-se seno e co-seno por

$$\operatorname{senz} := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

É algo surpreendente que se mantenham algumas das propriedades do caso real:

Proposição 2.6.6 (i) $\operatorname{sen}^2 z + \operatorname{cos}^2 z = 1$.

(ii) $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{senz} \operatorname{cos} w + \operatorname{sen} w \operatorname{cos} z$.

(iii) $\operatorname{cos}(z + w) = \operatorname{cos} z \operatorname{cos} w - \operatorname{senz} \operatorname{sen} w$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$.

As restantes funções trigonométricas definem-se do modo usual, à custa do seno e do co-seno (em última análise, a partir da exponencial):

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} \text{ e } \csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z},$$

o mesmo acontecendo para as funções hiperbólicas complexas:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \tanh z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}.$$

Algumas propriedades destas funções são referidas na proposição:

Proposição 2.6.7 (i) *As funções $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, $\cosh z$ e $\operatorname{senh} z$ são funções inteiras (analíticas em \mathbb{C}) com derivadas dadas por*

$$\begin{aligned} (\cos z)' &= -\operatorname{sen} z; & (\operatorname{sen} z)' &= \cos z; \\ (\cosh z)' &= \operatorname{senh} z; & (\operatorname{senh} z)' &= \cosh z. \end{aligned}$$

(ii) *As funções $\tan z$ e $\sec z$ são analíticas nos pontos em que $\cos z \neq 0$. Analogamente $\cot z$ e $\csc z$ são analíticas quando $\operatorname{sen} z \neq 0$.*

(iii) *A fórmula de Euler é válida em \mathbb{C} , isto é,*

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z.$$

As funções trigonométricas e hiperbólicas complexas relacionam-se de um modo inesperado (o que não acontece no caso real):

Exercício 2.6.8 *Prove que, para $z = x + yi$:*

- (i) $\cosh(iz) = \cos z$; $\operatorname{senh}(iz) = i \operatorname{sen} z$;
- (ii) $\cos(iz) = \cosh z$; $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{senh} z$;
- (iii) $\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$; $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$;
- (iv) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y$; $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \cosh^2 y$.

2.6.3 Função logaritmo

O logaritmo complexo generaliza o logaritmo real mas tem uma abordagem mais elaborada. Um processo "natural" de definir o logaritmo usando propriedades reais, baseia-se na representação polar de um número complexo, (2.6.2), isto é,

$$\log z = \log(\rho e^{i\theta}) = \log \rho + i\theta.$$

Como o argumento de z não é único, $\arg z = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, então o logaritmo complexo é multívoco, isto é, para cada z assume vários valores. Este facto é uma novidade em relação ao caso real, mas não o será tanto se pensarmos no logaritmo complexo como função inversa da exponencial complexa, que era uma função periódica de período $2\pi i$. Contudo se se restringir a exponencial a uma faixa de amplitude 2π a função já é uma bijecção:

Proposição 2.6.9 *Considere-se o conjunto A_{y_0} dado por*

$$A_{y_0} = \{x + yi \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}, y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\}.$$

Então a aplicação $e^z : A_{y_0} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ é bijectiva.

Dem. Sejam $z_1, z_2 \in A_{y_0}$. Para verificar a injectividade considere-se que $e^{z_1} = e^{z_2}$, isto é, $e^{z_1 - z_2} = 1$. Então $z_1 - z_2 = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ e

$$x_1 - x_2 = 0 \wedge y_1 - y_2 = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Como $y_1 - y_2 < 2\pi$, pois $z_1, z_2 \in A_{y_0}$, tem-se que $y_1 - y_2 = 0$, pelo que $z_1 = z_2$.

Logo e^z é injectiva.

Seja $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Verifique-se se existe $z \in A_{y_0}$ tal que $e^z = w$.

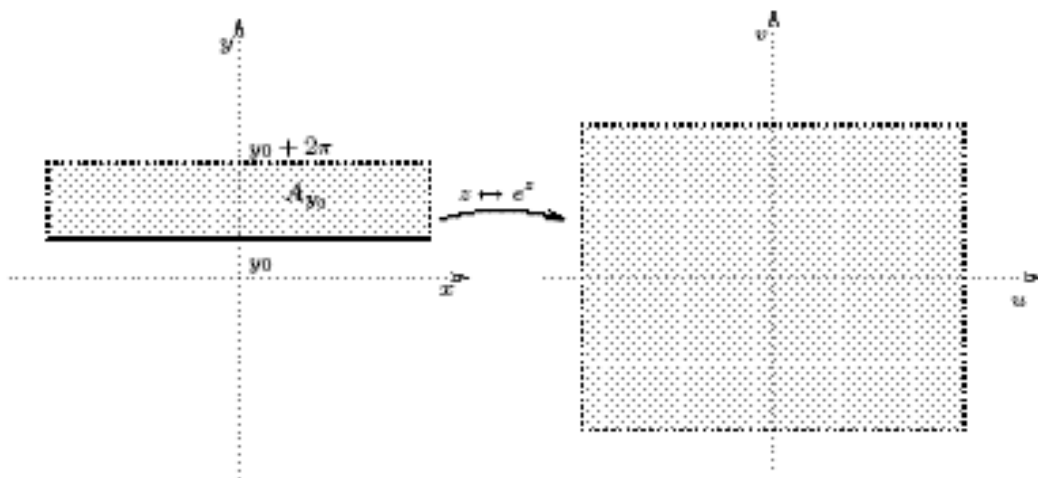
Como $e^{x+yi} = w = |w|e^{i\arg(w)}$ então

$$e^x = |w| \quad \text{e} \quad e^{yi} = e^{i\arg(w)}$$

e

$$x = \log|w| \quad \text{e} \quad y = \arg w.$$

O $\arg w$ é único, pois $w \in A_{y_0}$, pelo que e^z é sobrejectiva. ■



Este resultado indicia uma definição do logaritmo complexo por "ramos":

Definição 2.6.10 A função $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $y_0 \leq \text{Im}(\log z) < y_0 + 2\pi$ é definida por

$$\log z := \log |z| + i \arg(z) \quad (2.6.4)$$

onde $\arg(z) \in [y_0, y_0 + 2\pi[$. Esta função é chamada um **ramo da função logaritmo**.

Assim, a função $\log z$ só fica bem definida quando é indicado o intervalo, de amplitude 2π , onde está definido $\arg(z)$.

Exemplo 2.6.11 No ramo $[0, 2\pi[$ tem-se $\log(1+i) = \log\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i$ mas em $[\pi, 3\pi[$ será $\log(1+i) = \log\sqrt{2} + \frac{9}{4}\pi i$.

Para evitar a "ambiguidade" e a dependência do intervalo, define-se o valor principal de um logaritmo complexo:

Definição 2.6.12 Chama-se **valor principal** de $\log z$, $z \neq 0$, e representa-se por $\text{Log} z$, a

$$\text{Log} z := \log |z| + i \arg(z), \quad z \neq 0, \quad -\pi < \arg z \leq \pi.$$

Para obter os "outros" valores do logaritmo bastará fazer

$$\log z = \operatorname{Log}|z| + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

pelo que todos os logaritmos de um complexo z têm a mesma parte real mas o coeficiente da parte imaginária difere de múltiplos de 2π .

Exercício 2.6.13 *Mostre que se $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, então*

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 \pmod{2\pi}.$$

Resolução: Tem-se

$$\log(z_1 z_2) = \operatorname{Log}|z_1 z_2| + i \arg(z_1 z_2),$$

com $\arg(z_1 z_2) \in [y_0, y_0 + 2\pi[$. Mas

$$\operatorname{Log}|z_1 z_2| = \operatorname{Log}(|z_1||z_2|) = \operatorname{Log}|z_1| + \operatorname{Log}|z_2|$$

e

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \log(z_1 z_2) &= \operatorname{Log}|z_1| + i \arg(z_1) + \operatorname{Log}|z_2| + i \arg(z_2) \pmod{2\pi} \\ &= \log z_1 + \log z_2 \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

A função $\operatorname{Log} z$ não é analítica em \mathbb{C} pelo facto de $\arg z$, com $-\pi < \arg z \leq \pi$, não ser uma função contínua sobre o eixo real negativo, onde tem um "salto" de amplitude 2π .

Teorema 2.6.14 *A função $\operatorname{Log} z$ é analítica no conjunto*

$$D = \mathbb{C} \setminus \{x + yi : x \leq 0 \wedge y = 0\}$$

$$e (\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{z}.$$

Dem. Recorrendo à forma polar tem-se $z = \rho e^{i\theta}$ um elemento em D . Então

$$\log z = \operatorname{Log} \rho + i\theta$$

e obtem-se

$$u(\rho, \theta) = \operatorname{Log} \rho$$

e

$$v(\rho, \theta) = \theta.$$

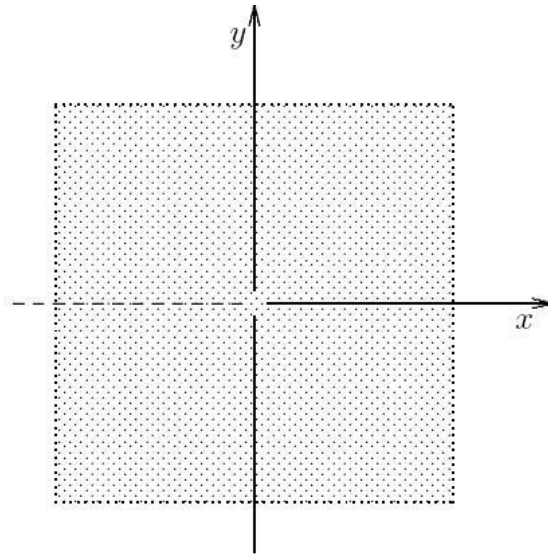
As condições de Cauchy-Riemann em coordenadas polares, (2.3.4), verificam-se, pois

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Como no domínio D as funções u e v , assim como as suas derivadas, são contínuas, conclui-se que $\log z$ é analítica em D , e, pelo Exercício 2.3.7, tem-se

$$\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{e^{i\theta}} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + i \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) = \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

■



Exercício 2.6.15 Calcule a derivada da função $\log(z^2)$ e indique o respectivo domínio de analiticidade.

Resolução: É possível derivar a função logaritmo desde que

$$\arg(z^2) \neq \pm\pi.$$

Se $\arg(z) = \theta$ então $\arg(z^2) = 2\theta$, pelo que bastará ter $2\theta \neq \pm\pi$, isto é

$$\theta \neq \pm\frac{\pi}{2}.$$

Assim em

$$D = \mathbb{C} \setminus \{x + yi : x = 0, y \in \mathbb{R}\},$$

tem-se

$$\frac{d}{dz}(\log z^2) = \frac{2}{z}.$$

2.6.4 Potências complexas generalizadas

Como definir uma potência em que a base e o expoente são números complexos, de modo a generalizar a potência de números reais ?

Dados $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $w \in \mathbb{C}$, define-se a potência complexa de um número complexo como

$$z^w := e^{w \log z}.$$

Tal como acontece com $\log z$ também z^w assume vários valores.

Ao valor particular de $z^w := e^{w \text{Log} z}$ chama-se o **valor principal** de z^w .

É natural que o número de valores assumidos por z^w dependa do "formato" do expoente $w \in \mathbb{C}$:

Proposição 2.6.16 *Sejam $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $w \in \mathbb{C}$.*

- a) *Se $w \in \mathbb{Z}$, então z^w fica univocamente determinado;*
- b) *Se $w = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, com p e q números inteiros primos entre si, então z^w tem q raízes distintas:*
- c) *Se $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ então z^w tem infinitos valores.*

Dem. a) Se $w \in \mathbb{Z}$, então z^w pode ser calculado com recurso à fórmula de Moivre da potenciação, pelo que fica univocamente determinado.

b) Seja $w = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, com p e q números inteiros primos entre si. Então

$$z^w = e^{w \log z} = e^{w (\text{Log} z + 2n\pi i)} = e^{w \text{Log} z} e^{w 2n\pi i}.$$

Cada $n \in \mathbb{Z}$, pela divisão inteira, pode ser escrito na forma $n = qm + r$ onde $m \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0, 1, \dots, q-1\}$. Então

$$e^{w 2n\pi i} = e^{\frac{2inp}{q}} = e^{2\pi i(qm+r)\frac{p}{q}} = e^{2\pi im} e^{2\pi ir\frac{p}{q}} = e^{2\pi ir\frac{p}{q}},$$

pelo que para os diferentes q valores de r , tem-se q raízes distintas.

c) Se $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ então $w \notin \mathbb{Q}$.

Suponha-se, por contradição, que z^w tem um número finito de valores. Assim, existem dois inteiros $n \neq m$ tais que

$$e^{2inw} = e^{2imw}.$$

Ora, isto implica que $2\pi inw = 2\pi imw + 2\pi ik$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Daqui resulta que

$$w = \frac{k}{n - m} \in \mathbb{Q},$$

o que contradiz a hipótese. ■

Exercício 2.6.17 Para a potência i^i indique o número de valores existentes, calcule-os e indique o seu valor principal.

Resolução:

$$i^i := e^{i \log i} = e^{i [\text{Log} 1 + (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i]} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Quanto à analiticidade da exponencial há que atender às propriedades da função exponencial e às particularidades do logaritmo complexo (definição por ramos):

Proposição 2.6.18 Considerem-se $z \in \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$.

1. A função $z \mapsto a^z$ é inteira para qualquer ramo da função logaritmo e tem derivada

$$(a^z)' = \log(a) a^z.$$

2. Fixando um ramo do logaritmo, por exemplo o principal, a função $z \mapsto z^b$ é analítica no domínio do ramo do logaritmo escolhido e

$$(z^b)' = b z^{b-1}.$$

Dem. 1. Atendendo à definição

$$a^z := e^{z \log a}$$

e pela derivada da função composta obtém-se

$$\frac{d}{dz} (a^z) = \frac{d}{dz} (e^{z \log a}) = \frac{d}{dz} (z \log a) e^{z \log a} = \log(a) a^z,$$

onde $\log(a)$ é uma constante.

A derivada é válida em \mathbb{C} .

2. Como $z^b := e^{b \log z}$, então

$$\frac{d}{dz} (z^b) = \frac{d}{dz} (e^{b \log z}) = \frac{d}{dz} (b \log z) e^{b \log z} = \frac{b}{z} z^b = b z^{b-1},$$

a qual é válida no domínio do logaritmo. ■

Exemplo 2.6.19 Indicar a região onde a função $f(z) = \sqrt{e^z + 1}$ é analítica.

Resolução: Pela Proposição anterior a função é analítica no domínio do logaritmo. Escolhendo o ramo principal do logaritmo, a função é analítica em

$$\mathbb{C} \setminus \{x + yi : x \leq 0 \wedge y = 0\}.$$

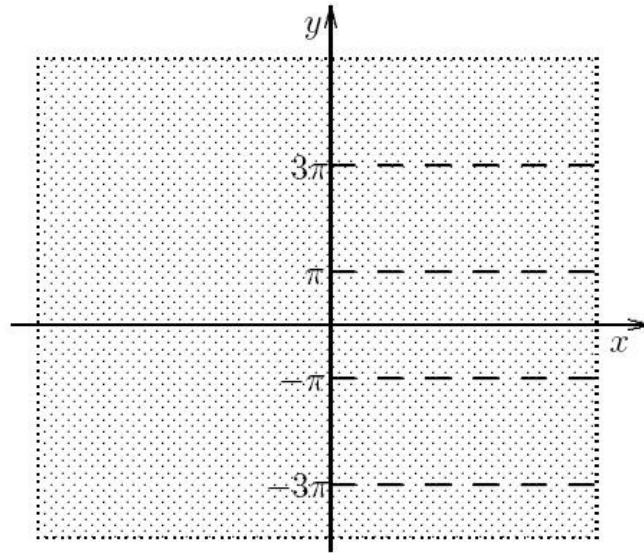
A região de holomorfia de $\sqrt{e^z + 1}$ é tal que $e^z + 1$ não pode ser real negativo.

Procure-se então z tal que $e^z + 1 \in R_0^-$, isto é,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} e^x \cos y + 1 \leq 0 \\ e^x \sin y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (e^x + 1 \leq 0 \wedge y = 2k\pi) \vee (-e^x + 1 \leq 0 \wedge y = (2k+1)\pi) \\ y = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq 0 \\ y = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Assim o domínio de analiticidade de $\sqrt{e^z + 1}$ é

$$D = \mathbb{C} \setminus \{x + yi : x \geq 0 \wedge y = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$



e, para $z \in D$,

$$\frac{d}{dz} (\sqrt{e^z + 1}) = \frac{e^z}{2\sqrt{e^z + 1}}.$$

2.7 Integração complexa

Os integrais complexos seguem a mesma metodologia que os integrais curvilíneos em \mathbb{R}^2 , pelo que se considera agora integrais de linha, ou integrais de caminho, complexos que se representam por

$$\int_C f(z) dz, \int_{\gamma} f(z) dz \quad \text{ou} \quad \int_{\gamma} f.$$

Nestes casos, a função $f(z)$ é integrada sobre uma curva C no plano complexo, chamada **caminho de integração**, definida parametricamente por uma função $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ com

$$\gamma(t) := x(t) + iy(t),$$

sendo $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais.

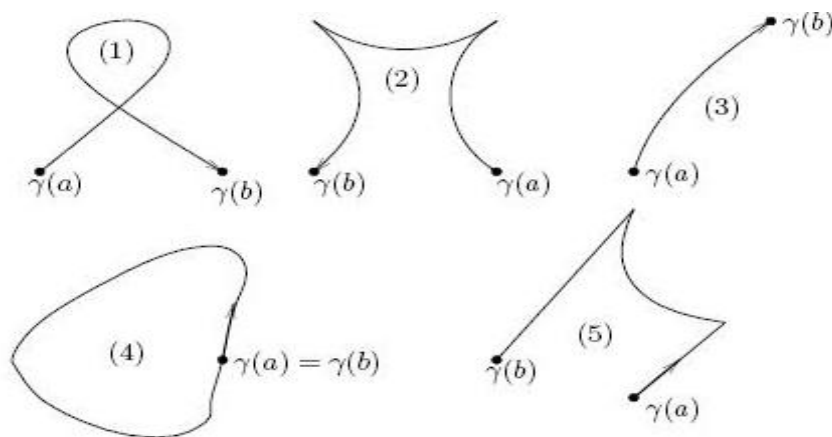
2.7.1 Integral de caminho

Alguns dos conceitos estabelecidos no capítulo da Geometria Diferencial são aqui utilizados, enquanto outros serão adaptados:

Definição 2.7.1 *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ uma curva em \mathbb{C} e $\{t_i\}_{i=1, \dots, n}$ uma partição de $[a, b]$ tal que*

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b. \quad (2.7.1)$$

- (i) γ diz-se **seccionalmente regular ou de classe \mathbf{C}^1** se $\gamma'(t)$ existe em $]a_{i-1}, a_i[$, $i = 1, \dots, n$, e é contínua em $[a_{i-1}, a_i]$.
- (ii) γ diz-se um **caminho** se $\gamma(t)$ é seccionalmente regular.
- (iii) γ é um **caminho fechado** se $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- (iv) γ diz-se um **caminho simples** se $\gamma(t)$ for injectiva em $[a, b[$, isto é, se $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$, $\forall t_1, t_2 \in [a, b[$.
- (v) A um caminho fechado e simples chama-se **curva de Jordan**.



(1) Curva não simples; (2) e (5) Curvas seccionalmente regulares; (3) Curva suave; (4) Curva de Jordan.

Nesta secção o conjunto A designará sempre um conjunto aberto.

O integral complexo pode ser definido como:

Definição 2.7.2 *Sejam $A \subseteq \mathbb{C}$, uma função $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ contínua e um caminho regular dado por $\gamma : [a, b] \rightarrow A$. Define-se o integral de f ao longo de γ (integral de caminho ou integral de linha) como*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Se γ for uma curva fechada, o integral representa-se por $\oint_{\gamma} f(z) dz$.

Exemplo 2.7.3 *Calcular o valor do integral $\int_{\gamma} z^2 dz$ sendo γ o segmento de recta que une $z = 0$ a $z = 2 + i$.*

Resolução: Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto 2t + it$ com $\gamma'(t) = 2 + i$.

Assim

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} z^2 dz &= \int_0^1 (2t + ti)^2 (2 + i) dt = (2 + i) \int_0^1 (3t^2 + 4t^2 i) dt \\ &= (2 + i)(3 + 4i) \int_0^1 t^2 dt = (2 + i)(3 + 4i) \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i.\end{aligned}$$

2.7.2 Propriedades elementares

As propriedades mais elementares (análogas às existentes nos integrais curvilíneos no caso real) são indicadas no resultado seguinte:

Proposição 2.7.4 *Sejam f, g funções complexas contínuas no conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ e $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ caminhos em A tais que o ponto final de γ_1 coincide com o ponto inicial de γ_2 . Então são válidas as seguintes propriedades:*

1. *Linearidade*

$$\int_{\gamma} (k_1 f + k_2 g) dz = k_1 \int_{\gamma} f dz + k_2 \int_{\gamma} g dz.$$

2. *Sentido inverso da integração em γ*

$$\int_{-\gamma} f dz = - \int_{\gamma} f dz.$$

3. *Partição do caminho*

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz.$$

4. *Independência da parametrização*

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\tilde{\gamma}} f dz, \text{ sendo } \tilde{\gamma} \text{ uma reparametrização de } \gamma.$$

Exemplo 2.7.5 *Calcular o integral do Exemplo 2.7.3 utilizando uma parametrização diferente para γ .*

Resolução: . $y = \frac{x}{2}$ com $0 \leq x \leq 2$, $z = x + \frac{1}{2}xi$ e $dz = (1 + \frac{1}{2}i)dx$.
Assim

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^2 dz &= \int_0^2 \left(\frac{3}{4}x^2 + x^2i \right) \left(1 + \frac{1}{2}i \right) dx \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}i \right) \left(\frac{3}{4} + i \right) \int_0^2 x^2 dx \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}i \right) \left(\frac{3}{4} + i \right) \frac{8}{3} = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i. \end{aligned}$$

Observação 2.7.6 A proposição anterior permite definir o integral de caminhos regulares definidos por troços, uma vez que estes caminhos são somas de caminhos regulares. Assim o integral sobre um caminho regular por troços será a soma dos integrais dos correspondentes caminhos regulares "parce-lares":

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt,$$

para γ seccionalmente regular em $[a, b]$ com uma partição do tipo (2.7.1).

Exemplo 2.7.7 Determine o valor do seguinte integral, sobre a circunferência unitária γ , percorrida no sentido positivo (contrário ao dos ponteiros do relógio),

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz.$$

Resolução: Pode-se parametrizar a circunferência do seguinte modo

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \theta \mapsto e^{i\theta},$$

com $\gamma'(\theta) = ie^{i\theta}$, obtendo-se, então

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} ie^{i\theta} d\theta = 2\pi i.$$

O próximo teorema permite estimar integrais em curvas de difícil parametrização ou de cálculo complicado:

Teorema 2.7.8 *Considere f uma função contínua em $A \subseteq \mathbb{C}$ e γ um caminho. Se f for limitada sobre γ , i.e., $\exists M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M, \forall z \in \gamma(t)$, então*

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M l(\gamma),$$

onde $l(\gamma)$ designa o comprimento de γ . De um modo mais geral tem-se

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt.$$

Dem. Dada

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto (x(t), y(t))$$

temos que

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

Considere-se, agora, uma função complexa de variável real, $f(t) = u(t) + iv(t)$.

Prove-se primeiro que

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Seja

$$\int_a^b f(t) dt = \rho e^{i\theta},$$

para ρ e θ fixos. Logo

$$\rho = e^{-i\theta} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b e^{-i\theta} f(t) dt$$

e

$$\rho = \operatorname{Re}(\rho) = \operatorname{Re} \left(\int_a^b e^{-i\theta} f(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} f(t) \right) dt.$$

Como

$$\operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} f(t) \right) \leq |e^{-i\theta} f(t)| = |f(t)|,$$

pois $|e^{-i\theta}| = 1$, tem-se

$$\rho = \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \int_a^b M |\gamma'(t)| dt = M l(\gamma). \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.7.9 *Seja γ uma circunferência de raio $r > 1$. Mostre que*

$$\left| \int_{\gamma} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2} dz \right| \leq 2\pi \frac{\log r + \pi}{r}.$$

Resolução: Pela desigualdade triangular e tendo em conta que $|z| = r$ e θ é tal que $-\pi \leq \theta < \pi$ tem-se

$$\left| \frac{\operatorname{Log} z}{z^2} \right| = \frac{|\log |z| + i\theta|}{|z^2|} \leq \frac{\log r + \pi}{r^2}.$$

Assim

$$\left| \int_{\gamma} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2} dz \right| \leq \frac{\log r + \pi}{r^2} \cdot 2\pi r = 2\pi \frac{\log r + \pi}{r}.$$

2.8 Teorema fundamental do cálculo

Uma primitiva de uma função complexa define-se de modo análogo ao caso real. Ou seja, uma primitiva F de uma função complexa f é analítica e satisfaz $F' = f$. As primitivas de f diferem apenas de constantes (complexas), pois se F_1 e F_2 são ambas primitivas de f , então $G = F_1 - F_2$ tem derivada identicamente nula, pelo que é uma constante.

Teorema 2.8.1 *Sejam $A \subseteq \mathbb{C}$, um caminho regular $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ e uma função contínua $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f = F'$ para alguma função analítica $F : A \rightarrow \mathbb{C}$. Então*

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Em particular, se γ é fechada então

$$\oint_{\gamma} f(z) \, dz = 0.$$

Dem. Usando a definição e as propriedades do cálculo integral obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) \, dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \, \gamma'(t) \, dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \, \gamma'(t) \, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (F \circ \gamma)(t) \, dt \\ &= (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a) \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z_1) - F(z_2). \end{aligned}$$

■

Observação 2.8.2 (i) *Se γ for seccionalmente regular o teorema permanece válido aplicando a decomposição sugerida pela Observação 2.7.6.*

(ii) *Uma conclusão imediata do Teorema 2.8.1 é que o integral ao longo de γ apenas depende dos seus pontos inicial e final. Logo, será independente do caminho percorrido.*

Exemplo 2.8.3 *Determine o valor do integral*

$$\int_{\gamma} z^3 dz$$

sendo γ o arco de elipse que une $z = 1$ a $z = \frac{i}{2}$.

Resolução: Como

$$z^3 = \frac{1}{4} (z^4)'$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^3 dz &= \frac{1}{4} \int_{\gamma} (z^4)' dz \\ &= \frac{1}{4} \left(\left(\frac{i}{2} \right)^4 - 1^4 \right) = -\frac{15}{64}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.8.4 (*Integral de potências de expoente inteiro*) Considere γ a circunferência de raio r e centro em $z_0 \in \mathbb{C}$. Calcular, para $m \in \mathbb{Z}$,

$$\oint_{\gamma} (z - z_0)^m dz.$$

Resolução: A equação paramétrica da circunferência γ é dada por

$$z(t) := \gamma(t) = z_0 + \rho e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Então

$$(z - z_0)^m = \rho^m e^{imt}, \quad dz = i\rho e^{it}$$

e

$$\oint_{\gamma} (z - z_0)^m dz = \int_0^{2\pi} \rho^m e^{imt} i\rho e^{it} dt = i\rho^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt.$$

Se $m \neq -1$,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} (z - z_0)^m dz &= \frac{i\rho^{m+1}}{i(m+1)} \int_0^{2\pi} (m+1) e^{i(m+1)t} dt \\ &= \frac{\rho^{m+1}}{m+1} \left[e^{i(m+1)t} \right]_0^{2\pi} = \frac{\rho^{m+1}}{m+1} (e^{i(m+1)2\pi} - 1) = 0. \end{aligned}$$

Se $m = -1$,

$$\oint_{\gamma} (z - z_0)^m dz = i\rho^0 \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i.$$

Então

$$\oint_{\gamma} (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } m = -1 \\ 0 & \text{se } m \neq -1, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Exemplo 2.8.5 Calcule o integral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$$

sendo γ :

- a) A semi-circunferência superior que une $z = 1$ a $z = -1$.
- b) A semi-circunferência inferior que liga os mesmos pontos.

Resolução: a) Considere-se a parametrização $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, com $\gamma'(\theta) = ie^{i\theta}$. Logo

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta = \pi i.$$

b) Tome-se agora a parametrização $\gamma(\theta) = e^{-i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, com $\gamma'(\theta) = -ie^{-i\theta}$. Assim

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{\pi} -\frac{1}{e^{-i\theta}} ie^{-i\theta} d\theta = -\pi i.$$

Neste caso o valor do integral depende do caminho utilizado!

Será que existe contradição com o Teorema 2.8.1?

Em que condições o integral é independente do caminho?

2.9 Teorema de Cauchy e sua evolução

Para responder às perguntas anteriores sublinha-se que a primitivação de funções complexas é mais "subtil" que a primitivação de funções reais.

Veja-se o exercício:

Exercício 2.9.1 *Provar que não existe uma função analítica f em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $f'(z) = \frac{1}{z}$.*

Resolução: Suponha-se, com vista a um absurdo, que existe tal função. Então

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 0,$$

pelo Teorema 2.8.1, sendo γ a circunferência unitária.

Por outro lado, pelo Exemplo 2.8.4, com $z_0 = 0$ e γ como anteriormente,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Desta contradição resulta que a função f' não existe.

Observação 2.9.2 *O facto de $(\text{Log} z)' = \frac{1}{z}$ contraria o exercício anterior? Não pois $\text{Log} z$ não é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, mas sim, pelo Teorema 2.6.14, em*

$$\mathbb{C} \setminus \{x + yi : y = 0 \wedge x \leq 0\}.$$

A Observação 2.9.2 mostra que seria conveniente o interior do caminho "não ter pontos" que impossibilitem o cálculo de primitivas. Como fazer? "Deformando" o domínio!

O modo de deformar o caminho é indicado pela definição seguinte:

Definição 2.9.3 *Suponha um conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ e dois caminhos fechados $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow A$. Chama-se **homotopia** entre os caminhos γ_0 e γ_1 a uma função contínua $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow A$ tal que, para $s \in [0, 1], t \in [a, b]$,*

a) $H(0, t) = \gamma_0(t)$

b) $H(1, t) = \gamma_1(t)$

c) $H(s, a) = H(s, b)$.

Exemplo 2.9.4 *Um exemplo de homotopia entre as circunferências definidas por $\gamma_0(t) = e^{2\pi it}$ e $\gamma_1(t) = 2e^{2\pi it}$ é $H(s, t) = (1 - s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$, para $s, t \in [0, 1]$.*

A definição de homotopia pode ser utilizada para obter um conceito topológico importante:

Definição 2.9.5 Um conjunto conexo $A \subseteq \mathbb{C}$ é **simplesmente conexo** se qualquer caminho fechado em A é homotópico a um ponto (caminho constante).

"Na prática", isto significa que o conjunto A não tem "buracos" ou, ainda, que o interior de qualquer curva de Jordan definida em A , está contido em A .

No caso real, para as funções terem primitiva é suficiente que sejam limitadas. Agora, no caso complexo, pretende-se também obter uma condição suficiente de simples verificação. Para tal apresenta-se uma "sequência histórica" da evolução desta pesquisa.

Em 1825, Cauchy baseou-se no **Teorema de Green**

Teorema 2.9.6 Sejam $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ funções contínuas assim como as derivadas parciais de primeira ordem, num conjunto D com fronteira C (caminho simples fechado). Então

$$\int_C (P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

formulou o seguinte resultado:

Teorema 2.9.7 (de Cauchy) Se f é analítica e f' contínua num conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ simplesmente conexo, então, para qualquer uma curva simples fechada γ em A ,

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Dem. Seja $f = u + vi$, então

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} ((udx - vdy)) + i \int_{\gamma} (udy + vdx) \\ &= \iint_A \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \iint_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy \\ &= 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

pelas condições de Cauchy-Riemann. ■

O matemático francês Édouard Goursat (1858-1936), num artigo publicado em 1900 (Transactions Amer. Math. Soc., vol.1), provou o teorema anterior sem considerar a hipótese de $f'(z)$ ser contínua.

Teorema 2.9.8 (de *Cauchy-Goursat*) Se f é analítica num conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ simplesmente conexo, então, para qualquer uma curva simples fechada γ em A ,

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

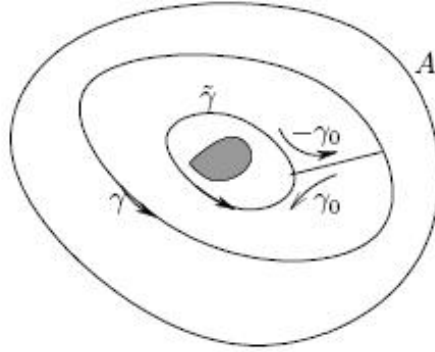
A demonstração, que pode ser encontrada, além do artigo referido, em Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., 1999,

baseia-se em três passos: primeiro considera-se γ a fronteira de um triângulo, depois a fronteira de um polígono e, finalmente, uma curva fechada simples (onde está inscrito um polígono).

Teorema 2.9.9 (da *deformação do caminho*) Seja f uma função analítica em $A \subseteq \mathbb{C}$, simplesmente conexo, e γ uma curva simples fechada em A . Se γ pode ser continuamente deformada noutra curva $\tilde{\gamma}$ sem sair de A , isto é, se γ é homotópica a $\tilde{\gamma}$ em A , então

$$\oint_{\gamma} f dz = \oint_{\tilde{\gamma}} f dz.$$

Dem. Seja $\tilde{\gamma} = \gamma + \gamma_0 - \tilde{\gamma} - \gamma_0$.



Sobre $\tilde{\gamma}$ e no seu interior, o Teorema de Cauchy é válido, logo

$$0 = \oint_{\tilde{\gamma}} f dz = \oint_{\gamma} f dz + \int_{\gamma_0} f dz - \oint_{\tilde{\gamma}} f dz - \int_{\gamma_0} f dz,$$

pelo que

$$\oint_{\gamma} f \, dz = \oint_{\tilde{\gamma}} f \, dz.$$

■

2.10 Fórmula integral de Cauchy e aplicações

A consequência mais importante do Teorema de Cauchy é a fórmula integral de Cauchy, de grande utilidade para calcular integrais.

Teorema 2.10.1 (Fórmula integral de Cauchy) *Se a função f é analítica em $A \subseteq \mathbb{C}$, simplesmente conexo, então para $z_0 \in A$ e γ um caminho em A , simples, fechado e cujo interior inclua z_0 , tem-se*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz. \quad (2.10.1)$$

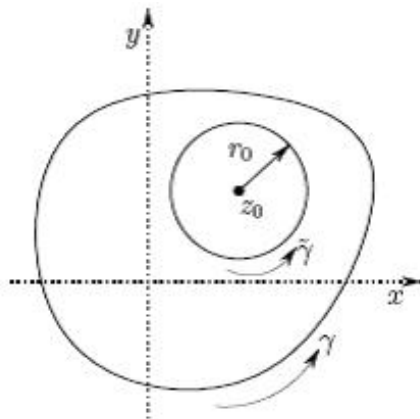
Dem. Usando o teorema de Cauchy-Goursat e o teorema da deformação, tem-se

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz &= \oint_{\tilde{\gamma}} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz \\ &= f(z_0) \oint_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z - z_0} \, dz + \oint_{\tilde{\gamma}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \, dz \\ &= f(z_0) 2\pi i + \oint_{\tilde{\gamma}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \, dz. \end{aligned} \quad (2.10.2)$$

Como f é contínua, isto é,

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Designa-se por δ o raio r_0 do caminho simples e fechado, $\tilde{\gamma}$, que contém z_0 .



Então

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\tilde{\gamma}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| &\leq \oint_{\tilde{\gamma}} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} |dz| \\ &\leq \frac{\epsilon}{\delta} 2\pi\delta = 2\pi\epsilon. \end{aligned}$$

Assim o valor absoluto do integral pode-se tornar tão pequeno quanto se queira. Portanto, toma-se δ cada vez mais pequeno e como as outras duas partes de (2.10.2) não dependem de δ , permanecendo constantes, tem-se

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0)2\pi i + 0$$

pelo que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

■

Exemplo 2.10.2 1. Sendo γ a circunferência unitária, calcular:

a) $\oint_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz$

$$b) \oint_{\gamma} \frac{e^z - z}{z-2} dz$$

2. Calcule $\oint_{\gamma} \frac{e^z - z}{z-2} dz$, com γ uma circunferência de raio 3 e centro na origem.

Resolução:

1. a) Tomando $f(z) = e^z$ que é uma função inteira e $z_0 = 0$, pela fórmula integral de Cauchy

$$\oint_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i f(z_0) = 2\pi i.$$

b) Pelo Teorema de Cauchy-Goursat o integral é nulo.

2.) Seja $f(z) = e^z - z$, $z_0 = 2$. Então

$$\oint_{\gamma} \frac{e^z - z}{z-2} dz = 2\pi i (e^2 - 2).$$

O Teorema 2.10.1 é também útil para obter um resultado surpreendente: as funções analíticas têm derivadas de qualquer ordem!

Teorema 2.10.3 (Fórmula integral de Cauchy para derivadas) *Seja f uma função analítica num domínio $A \subseteq \mathbb{C}$ simplesmente conexo. Então:*

(i) *Todas as derivadas de f existem em A .*

(ii) *Para qualquer caminho de Jordan $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ seccionalmente regular, $z_0 \in A - \gamma([a, b])$ e $k \in \mathbb{N}_0$ tem-se*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz. \quad (2.10.3)$$

Dem. Para $k = 0$, tem-se a fórmula integral de Cauchy.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz.$$

Para calcular $f'(z_0)$ calcula-se

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + \Delta z_0) - f(z_0)}{\Delta z_0} &= \frac{1}{2\pi i \Delta z_0} \oint_{\gamma} \left(\frac{1}{z - z_0 - \Delta z_0} - \frac{1}{z - z_0} \right) f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z_0)(z - z_0)} dz. \end{aligned}$$

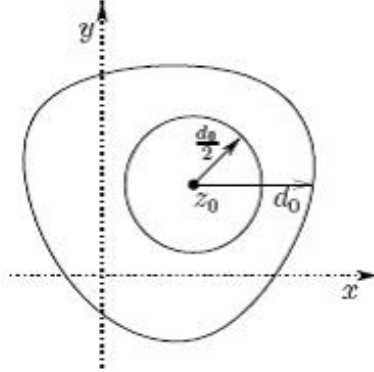
Quando $\Delta z_0 \rightarrow 0$ tem-se

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z_0)(z - z_0)} dz \longrightarrow \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz,$$

pelo que

$$\begin{aligned} &\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z_0)(z - z_0)} dz - \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \\ &= \Delta z_0 \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z_0)(z - z_0)^2} dz. \end{aligned}$$

Seja M tal que $|f(z)| \leq M$, $L = l(\gamma)$, $d_0 = d(z_0, \gamma)$.



Como $\forall z \in \gamma$, $|z_0| > d_0$, então

$$\left| \Delta z_0 \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z_0)(z - z_0)^2} dz \right| \leq \frac{|\Delta z_0| ML}{(d_0 - \Delta z_0) d_0^2} \xrightarrow{\Delta z_0 \rightarrow 0} 0.$$

O resultado pretendido obtem-se por indução. ■

Observação 2.10.4 Em última análise a fórmula (2.10.3) (que para $k = 0$ coincide com (2.10.1)) indica que os valores de f e das suas derivadas são determinados pelos valores que a função toma sobre a fronteira do domínio.

Exemplo 2.10.5 Utilizando (2.10.3), calcule o integral

$$\oint_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2} dz.$$

sendo $\gamma = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Resolução: Usando a fórmula integral de Cauchy para derivadas com $k = 1$ e $z_0 = 0$ tem-se

$$\oint_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \cos 0 = 2\pi i.$$

Finalmente a condição suficiente, apresentada pelo matemático italiano Giacinto Morera (1856-1909):

Teorema 2.10.6 (de Morera) Se f é contínua num domínio simplesmente conexo $A \subseteq \mathbb{C}$ e, para qualquer caminho fechado γ em A , se tem

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

então f é analítica em A .

Dem. Como o domínio é simplesmente conexo, (além de ser conexo não tem "buracos"), prova-se que existe primitiva, F , que é analítica, pois $F' = f$ (contínua), pela fórmula integral de Cauchy existem $F'' = f'$, $F''' = f'' \dots$. Logo f é analítica. ■

A obtenção de estimações para a função f e para as suas derivadas constitui outro campo de aplicações do Teorema de Cauchy e da fórmula integral

Teorema 2.10.7 (Desigualdade de Cauchy) Sejam f uma função analítica em A e γ a circunferência de raio r centrada em $z_0 \in A$. Se $|f(z)| \leq M$, para qualquer $z \in A$, então

$$\left| f^{(k)}(z_0) \right| \leq \frac{k!M}{r^k}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Dem. Pela fórmula integral de Cauchy para derivadas

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz.$$

Então

$$\begin{aligned} \left| f^{(k)}(z_0) \right| &= \frac{k!}{2\pi} \left| \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{k+1}} |dz| \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} \frac{M}{r^{k+1}} 2\pi r = \frac{k!M}{r^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

■

Esta desigualdade é importante para obter um resultado famoso para funções inteiras:

Teorema 2.10.8 (de *Liouville*) *Toda a função inteira e limitada é constante.*

Dem. Pela desigualdade de Cauchy, para qualquer $z_0 \in Df$, tem-se

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r} \longrightarrow 0, \text{ quando } r \rightarrow +\infty.$$

Como $f'(z_0)$ é um número fixo que não depende de r , resulta que $f'(z_0) = 0$, $\forall z_0 \in Df$.

Logo f é constante. ■

Seja $\gamma = \{z : |z - z_0| = r_0\}$. Se f é analítica sobre γ e no interior de γ , então, pela fórmula integral de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

resulta que

$$\begin{aligned}
 |f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi r_0} \oint_{\gamma} |f(z)| |dz| \\
 &= \frac{1}{2\pi r_0} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + r_0 e^{i\theta}) \right| r_0 d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + r_0 e^{i\theta}) \right| d\theta \equiv K. \tag{2.10.4}
 \end{aligned}$$

K é chamado o **valor médio de $|f|$ sobre γ** .

A expressão mostra ainda que o valor de $|f|$ no centro não excede o valor médio.

Teorema 2.10.9 (do **módulo máximo**) *Considere-se um domínio limitado A e $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em A e contínua em \bar{A} . Seja M o máximo de $|f(z)|$ na fronteira de A , $\partial(A)$, isto é, $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in \partial(A)$. Então:*

(i) $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in A$.

(ii) Se $|f(z)| = M$ para algum $z \in A$, então f é constante em A .

Dem. (i) Seja M o máximo de $|f(z)|$ em $\{z : |z - z_0| \leq r_0\}$. Logo

$$|f(z_0)| \leq M, \quad \left| f(z_0 + r_0 e^{i\theta}) \right| \leq M \quad \text{e} \quad K \leq M.$$

Se f for tal que $|f(z_0)| = M$, então por (2.10.4) $M \leq K$. Pelo que $M = K$.

(ii) Suponhamos que $|f(z_0 + r_0 e^{i\theta})| < M$ para algum valor de θ , então, como $|f|$ é uma função contínua, existiria um intervalo onde a função teria valores menores que M , e o valor médio seria inferior a M . Assim sobre γ a função $|f|$ é sempre igual a M .

Considerando agora

$$K_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + r_1 e^{i\theta}) \right| d\theta, \quad \text{com } r_1 < r_0.$$

Do mesmo modo tem-se que

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \gamma_1,$$

e, como anteriormente, $K_1 = M$. Então $|f(z)| = M$, $\forall z \in \gamma_1$, e

$$|f(z)| = M, \forall z \in \{z : |z - z_0| \leq r_0\},$$

isto é, sempre que $|f(z_0)| = M$ tem-se $|f|$ constante o que implica f constante. ■

Exemplo 2.10.10 *Encontrar o máximo de $|e^z|$ no círculo $|z| \leq 1$.*

Resolução: $|e^z| = e^x$. Como $x \in [-1, 1]$, então o máximo ocorre em $x = 1$ e vale e .

Os resultados anteriores permitem provar um resultado importante e algo surpreendente, por envolver outra área da Matemática, a Álgebra:

Teorema 2.10.11 (*Fundamental da Álgebra*) *Se n é um número inteiro positivo e*

$$P_n(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$$

um polinómio com $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, então existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P_n(z_0) = 0$.

Dem. Suponha-se que $P_n(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Então a função

$$f(z) = \frac{1}{P_n(z)}$$

é inteira e $f(z)$ não é constante, pois $a_n \neq 0, n \geq 1$. Se se provar que f é limitada, então pelo teorema de Liouville conclui-se que f é constante o que é absurdo.

Mostre-se que $f(z) \rightarrow 0$ quando $z \rightarrow \infty$, isto é,

$$\forall M > 0, \exists K > 0 : |z| > K \Rightarrow |P_n(z)| > M.$$

Considerando

$$a_nz^n = P_n(z) - a_0 - a_1z - \dots - a_{n-1}z^{n-1}$$

obtem-se, pela desigualdade triangular,

$$|P_n(z)| \geq |a_n||z|^n - |a_0| - |a_1||z| - \dots - |a_{n-1}||z|^{n-1},$$

Defina-se $a := |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|$. Se $|z| > 1$, então

$$\begin{aligned} |P_n(z)| &\geq |z|^{n-1} \left(|a_n||z| - \frac{|a_0|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_1|}{|z|^{n-2}} - \dots - |a_{n-1}| \right) \\ &\geq |z|^{n-1} \left(|a_n||z| - \frac{|a_0|}{1} - \frac{|a_1|}{1} - \dots - |a_{n-1}| \right) \\ &\geq |z|^{n-1} (|a_n||z| - a). \end{aligned} \quad (2.10.5)$$

Seja

$$K := \max \left\{ 1, \frac{M+a}{|a_n|} \right\}.$$

Se $K = 1$ e $|z| > 1$ então

$$\begin{aligned} |P_n(z)| &\geq |z|^{n-1} (|a_n||z| - a) \\ &\geq |a_n||z| - a \\ &\geq |a_n| \frac{M+a}{|a_n|} - a = M. \end{aligned}$$

Se $K = \frac{M+a}{|a_n|}$ e $|z| > \frac{M+a}{|a_n|}$ obtem-se, directamente.

$$|P_n(z)| \geq |a_n| \frac{M+a}{|a_n|} - a = M.$$

Assim se $|z| > K$, tem-se que

$$\left| \frac{1}{P_n(z)} \right| \leq \frac{1}{M},$$

mas no conjunto $|z| \leq K$, $\left| \frac{1}{P_n(z)} \right|$ é limitada, por exemplo, por L . Portanto

$$\left| \frac{1}{P_n(z)} \right| \leq \max \left\{ \frac{1}{M}, L \right\}$$

em \mathbb{C} , i.e.,

$$|f(z)| \leq \max \left\{ \frac{1}{M}, L \right\}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

ou seja $f(z)$ é limitada em \mathbb{C} . Como era uma função inteira, conclui-se, pelo teorema de Liouville que f é constante, o que é um absurdo, pois viu-se que f não era constante pelo facto de $a_n \neq 0$, $n \geq 1$.

O absurdo veio do facto de se supor que $P_n(z)$ não tinha nenhuma raiz em \mathbb{C} . ■

2.11 Exercícios

1. Para $z = x + yi$, determine a parte real e a parte imaginária do número complexo $w = \frac{z+2}{z-1}$.

2. Prove que $\operatorname{Re}(iz) = \operatorname{Im}(z)$ e que $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

3. Para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, mostre que:

a) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$

b) $|1 - \overline{z_1}z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$

c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (desigualdade triangular).

Em que condições se obtém a igualdade?

Interprete o resultado geometricamente.

4. Resolva em \mathbb{C} as equações:

a) $z^5 - 2 = 0$

b) $z^4 + i = 0$.

5. Descreva geometricamente no plano complexo cada uma das condições:

a) $-2 \leq \operatorname{Im}(z) < 1$

b) $0 \leq \arg(z + 1 + i) \leq \frac{\pi}{2}$

c) $\operatorname{Re}(\frac{1}{z}) < 1$

d) $|z - 4 + i| \geq |z + 2i|$.

6. Prove que não existe

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\overline{z}}{z}.$$

7. Mostre que a função $f(z) = \sqrt{|xy|}$ verifica as equações de Cauchy-Riemann em $(x, y) = (0, 0)$, mas não existe $f'(0)$.

Este facto contradiz o Teorema 2.3.4?

8. Determine o domínio de analiticidade da função racional

$$f(z) = \frac{z^3 + 2z + 1}{z^3 + 1}.$$

9. Considere uma função analítica $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Determine a sua parte imaginária sabendo que:

a) $\operatorname{Re} f = x^2 - xy - y^2$

b) $\operatorname{Re} f = x^2 - y^2$.

10. Seja f uma função analítica num domínio $D \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}$, dada por $f(z) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta)$, com $u, v \in C^2(D)$. Utilize as condições de Cauchy-Riemann em coordenadas polares, para mostrar que, em D , u e v satisfazem a equação de Laplace em coordenadas polares, isto é,

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

11. Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função analítica em D tal que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Mostre que:

- a) f' é constante em D .
- b) $f(z) = -icz + d$, com $c \in \mathbb{R}$ e $d \in \mathbb{C}$

12. Se $f = u + iv$ é analítica num aberto $D \subseteq \mathbb{C}$, com $u, v \in C^2(D)$, então $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.

13. Para que valores de z se tem

$$\overline{e^{iz}} = e^{i\bar{z}} \quad ?$$

14. Utilizando a definição de $\sinh z$ e $\cosh z$, prove que:

- a) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
- b) $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$
- c) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$.

15. Verifique se as funções $\sen z$ e $\cos z$ são periódicas e, em caso afirmativo, indique os seus períodos minimais.

16. Encontre todas as raízes das equações:

- a) $e^z = -3$
- b) $\cos z = 2$
- c) $\sinh z = i$.

17. Considere um conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{C}$ e uma função $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Mostre se f é contínua no ponto $z_0 \in D$ isso não implica que f seja diferenciável em z_0 , isto é, o recíproco da Proposição 2.2.13 é falso.

18. Prove que se $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ então

$$\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log(z_1) - \log(z_2) \pmod{2\pi}.$$

19. Calcule todos os valores de:

- a) $\log|(1+i)^i|$
- b) $|(1+i)^{1+i}|$.

20. Derive e indique o domínio de analiticidade das funções:

- a) $\log(e^z + 1)$
- b) z^z
- c) $\frac{1}{e^z - 1}$
- d) $\frac{e^{az}}{a^2 - z^2}, a \in \mathbb{R}$
- e) $\sqrt{z^2 - 2}$

21. Designe por γ a fronteira do quadrado com vértices nos pontos $z = 0$, $z = 1$, $z = 1 + i$ e $z = i$. Justifique que:

- a) $\int_{\gamma} (3z + 1) dz = 0$.
- b) $\int_{\gamma} \pi e^{\pi \bar{z}} dz = 4(e^{\pi} - 1)$.

22. Calcule os integrais:

a) $\int_{\gamma} \operatorname{Re} z \, dz$ para o caminho $\gamma(t) = t + it$ com $t \in [0, 1]$. (Note que a função integranda assume valores reais, mas o valor do integral não é real.)

b) $\int_{\gamma} z^3 \, dz$ sendo γ o caminho (com sentido anti-horário) sobre a elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ entre 1 e $\frac{i}{2}$.

c) $\int_{\gamma} e^z \, dz$ sendo γ o caminho que descreve:

(i) o segmento de recta de 1 a i .

(ii) o arco de circunferência centrada na origem (com sentido anti-horário) e raio 1, entre 1 e i .

d) $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz$

e) $\oint_{|z|=1} \frac{1}{|z|} dz$

23. Sendo γ o arco de circunferência $|z| = 2$ que se situa no primeiro quadrante mostre que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{\pi}{3}.$$

24. Calcule o integral, com γ a curva dada por $\gamma(t) = e^{it} \operatorname{sen}^3 t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$,

$$\int_{\gamma} z^2 \, dz.$$

25. Seja γ um caminho fechado, orientado no sentido positivo, com

$$f(z_0) = \oint_{\gamma} \frac{z^3 + 2z}{(z - z_0)^3} dz.$$

Prove que $f(z_0) = 6z_0\pi i$ quando z_0 pertence ao interior de γ e $f(z_0) = 0$ se z_0 está no seu exterior.

26. Calcule os seguintes integrais:

a) $\oint_{\gamma} \frac{1}{z} dz$, sendo $\gamma(t) = \cos t + 2i \sin t$, $0 \leq t < 2\pi$.

b) $\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz$, com $\gamma(t) = \cos t + 2i \sin t$, $0 \leq t < 2\pi$.

c) $\oint_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz$, para $\gamma(\theta) = 2 + e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

d) $\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2 - 1} dz$, sendo $\gamma(t) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\}$.

27. Considere $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ um caminho fechado seccionalmente regular e $w \notin \gamma([a, b])$. O número de “voltas” dadas pelo caminho γ em redor do ponto w chama-se **número de rotação de γ em torno de w** ou **índice de w em relação a γ** , (representa-se por $\text{rot}(\gamma, w)$ ou $\text{Ind}_{\gamma}(w)$, respectivamente) e é dado por

$$\text{Ind}_{\gamma}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - w}.$$

a) Definindo a função

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - w} ds,$$

mostre $[\gamma(t) - w]e^{-2\pi i h(t)}$ é constante.

b) Prove que $\text{rot}(\gamma, w)$ é um número inteiro.

28. Sejam $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica e γ uma curva fechada em D . Prove que, para qualquer $z_0 \in D \setminus \gamma$, se tem

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

29. Considere $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica, $f \neq 0$, e γ uma curva fechada, seccionalmente regular em D . Prove que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

30. Utilizando o Teorema do módulo máximo determine o máximo das funções:

a) $f(z) = |\operatorname{sen} z|$ em $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

b) $f(z) = |\cos z|$ em $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

2.12 Atividades

Atividade 1:

Considere as transformações de Möbius definidas no Exemplo 2.5.2.

a) Mostre que se $ad - bc = 0$ então a respectiva transformação de Möbius é constante.

b) Prove que uma transformação de Möbius f pode ser decomposta na forma $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, sendo

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z + \frac{d}{c} \text{ (translação)} \\ f_2(z) &= \frac{1}{z} \text{ (inversão no círculo unitário)} \\ f_3(z) &= \frac{bc - ad}{c^2} z \text{ (transformação linear) (rotação se } \left| \frac{bc - ad}{c^2} \right| = 1) \\ f_4(z) &= z + \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

c) Verifique que uma transformação de Möbius transforma rectas **e** circunferências em rectas **ou** circunferências.

Atividade 2:

Descreva as transformações geométricas realizadas por cada uma das seguintes aplicações conformes

$$f(z) = \operatorname{sen} z, \quad g(z) = \cos z, \quad h(z) = \operatorname{senh} z, \quad m(z) = \cosh z$$

e apresente um "gráfico"ilustrativo para cada caso.

Sugestão: Se for útil, pode utilizar as relações

$$\cos z = \operatorname{sen} \left(z + \frac{\pi}{2} \right), \quad \operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen}(iz), \quad \cosh z = \cos(iz).$$

Actividade 3:

Seja $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função definida num domínio D simplesmente conexo. Mostre que as proposições seguintes são equivalentes:

1. f é analítica em D .
2. f é primitivável em D .
3. $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para qualquer caminho γ fechado e seccionalmente regular em D .
4. f admite derivadas de todas as ordens em D .

Actividade 4:

Utilizando a Análise Complexa, demonstre o Teorema Fundamental da Álgebra (Teorema 2.8.1), justificando pormenorizadamente as afirmações.

Sugestão: Admita que $P_n(z)$ não tem zeros em \mathbb{C} , defina

$$f(z) := \frac{1}{P_n(z)}$$

e prove que:

- f é inteira
- f não é constante
- f é limitada.

Capítulo 3

Equações Diferenciais Ordinárias

Neste capítulo o aluno deverá saber:

- Distinguir e classificar equações diferenciais quanto à ordem, linearidade e homogeneidade.
- Averiguar se uma função é solução duma equação diferencial ordinária e/ou de um problema.
- Verificar formalmente condições necessárias e conhecer condições suficientes para a existência de solução, explícita ou implícita.
- Analisar se uma equação diferencial ordinária de 1^a ordem é exacta e, em caso afirmativo, determinar a respectiva família de soluções, ou, em caso contrário, averiguar a existência de factores integrantes.
- Verificar se uma equação diferencial ordinária de 1^a ordem tem variáveis separáveis e, em caso afirmativo, determinar a respectiva família de soluções.
- Reconhecer uma equação diferencial ordinária de 1^a ordem linear e dominar a técnica de resolução.
- Verificar se um conjunto de soluções forma uma base do espaço de soluções e, nesse caso, determinar a solução geral.
- Reduzir a ordem de uma equação diferencial ordinária, de ordem superior à 1^a, conhecida uma solução.

- Dominar técnicas e métodos de resolução de equações diferenciais lineares de ordem superior, com coeficientes constantes, homogêneas e não homogêneas, tais como, o método da variação dos parâmetros.
- Construir problemas que modelem situações da vida real e analisar a respectiva adaptabilidade e coerência.

3.1 Definições e generalidades

Uma **equação diferencial ordinária** (EDO) é uma igualdade que contem: uma variável independente (real), $x \in \mathbb{R}$, uma variável (real) dependente, y , e algumas das suas derivadas, $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Exemplos:

$$xy' + 3y = 6x^3 \quad (3.1.1)$$

$$(y')^2 - 4y = 0 \quad (3.1.2)$$

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0 \quad (3.1.3)$$

$$2x^2 y'' - (y')^2 = 0. \quad (3.1.4)$$

Designa-se por **ordem da EDO** a maior ordem da derivada (com coeficiente não identicamente nulo). Assim as equações (3.1.1) e (3.1.2) são de 1ª ordem, enquanto (3.1.3) e (3.1.4) são de 2ª ordem.

Se a igualdade tiver mais de uma variável independente, então será designada por **equação diferencial parcial**. Exemplo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Neste curso estudam-se apenas as equações diferenciais ordinárias, pelo que se passarão a designar apenas por equações diferenciais.

De uma forma geral uma equação diferencial de ordem n pode ser escrita na forma

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (3.1.5)$$

sendo F uma função conhecida.

Uma relação funcional entre as variáveis dependente y e independente x , num certo intervalo I , que verifique a equação diferencial, chama-se **solução** da equação diferencial.

A solução pode estar definida num intervalo limitado, do tipo $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, ou ilimitado, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b]$, $]-\infty, b[$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.

Por exemplo, $y(x) = 7e^x + x^2 + 2x + 2$ é solução da equação diferencial

$$y' - y = -x^2$$

para $I = \mathbb{R}$. De modo análogo $y(x) = x \tan(x + 3)$ é solução da equação diferencial

$$xy' - y^2 - y = x^2$$

para $I =]-\frac{\pi}{2} - 3, \frac{\pi}{2} - 3[$.

A **solução geral** de uma equação diferencial de ordem n depende de n constantes arbitrárias. Ou seja, a solução y depende de x e das constantes reais c_1, c_2, \dots, c_n .

Por exemplo, as funções

$$y_1(x) = x^3 + \frac{c}{x^3}, \quad (3.1.6)$$

$$y_2(x) = x^2 + cx + \frac{c^2}{4},$$

$$y_3(x) = c_1x + c_2x^3,$$

$$y_4(x) = \frac{2x}{c_1} - \frac{2}{c_1^2} \log(1 + c_1x) \quad (3.1.7)$$

são soluções gerais das equações (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) e (3.1.4), respectivamente.

Obviamente $y_1(x)$ está definida em qualquer intervalo que não contenha o valor 0, $y_2(x)$ e $y_3(x)$ estão definidas em \mathbb{R} , e $y_4(x)$ coloca restrições quer à constante c_1 quer à variável x , nomeadamente $c_1 \neq 0$ e $1 + c_1x > 0$.

A função $y_1^*(x) = x^3$ é uma **solução particular** da equação (3.1.1) que se obtém considerando, em (3.1.6), $c = 0$.

Note-se que $y_4^*(x) = x^2$ é uma solução de (3.1.4) mas, contudo, não está incluída em (3.1.7). Esta solução "extra", que não pode ser obtida a partir de (3.1.7) atribuindo valores à constante, chama-se **solução singular** de (3.1.4).

Ao designar uma função por solução geral, o termo "geral" não deve ser considerado no sentido de "completa". À totalidade das soluções de uma equação diferencial chama-se **solução completa**.

Considere-se uma equação diferencial de 1ª ordem na forma $F(x, y, y') = 0$. A função $y = \phi(x)$ diz-se uma **solução explícita** se $F(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0$ no intervalo I .

A relação $\psi(x, y) = 0$ diz-se uma **solução implícita** de $F(x, y, y') = 0$, desde que represente uma ou mais funções $y = \phi(x)$ que verifiquem $F(x, \phi(x), \phi'(x)) \equiv 0$.

Em geral é difícil, e por vezes mesmo impossível, determinar explicitamente y na relação $\psi(x, y) = 0$. Contudo poder-se-á testar a solução obtendo y' pela derivada duma função implícita: $y' = -\frac{\psi'_x}{\psi'_y}$ e verificar se $F(x, y, -\frac{\psi'_x}{\psi'_y}) \equiv 0$.

Sem perda de generalidade, considerar-se-á sempre a equação (3.1.5) escrita na forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (3.1.8)$$

onde f é uma função conhecida. Desta forma evita-se que (3.1.5) represente mais que uma equação. Por exemplo $(y')^2 = 4y$ representa duas equações diferenciais $y' = \pm 2\sqrt{y}$.

As equações diferenciais são classificadas em dois grupos: **lineares** e **não lineares**. Uma equação diferencial é **linear** se é linear em y e em todas as suas derivadas. Assim uma equação diferencial linear de ordem n tem a forma

$$P_n[y] := a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y.$$

As equações (3.1.1) e (3.1.3) são exemplos de equações diferenciais lineares enquanto (3.1.2) e (3.1.4) são equações não lineares.

Se $P_n[y](x) \equiv 0$ a equação diferencial diz-se **homogénea**, caso contrário dir-se-á **não homogénea**.

No campo das aplicações é vulgar pretender-se soluções de (3.1.8) que verifiquem determinadas restrições, chamadas **condições iniciais** ou **condições de fronteira**. Por exemplo, por condições iniciais para a equação (3.1.8) entende-se n condições do tipo

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad (3.1.9)$$

em que y_0, \dots, y_{n-1} e x_0 são constantes dadas. Um problema que englobe a equação diferencial (3.1.8) e as condições (3.1.9) chama-se **problema de valor inicial**. É vulgar procurar soluções do problema (3.1.8), (3.1.9) num intervalo I que contenha x_0 .

Repare-se que a equação diferencial $xy' - 3y + 3 = 0$:

- não tem nenhuma solução que satisfaça $y(0) = 0$;
- tem uma única solução, $y(x) \equiv 1$, que verifica $y(1) = 1$;
- tem infinitas soluções $y(x) = cx^3 + 1$, $c \in \mathbb{R}$, que satisfazem $y(0) = 1$.

Esta variedade de situações coloca uma questão essencial: a existência de solução. Infelizmente a classe das equações diferenciais solúveis é muito restrita. Assim um dos principais objectivos da teoria das Equações Diferenciais Ordinárias é encontrar condições suficientes para garantir a existência de, pelo menos, uma solução para uma certa equação ou problema de valor inicial.

Constituem também áreas de interesse nesta Teoria:

- calcular o número de soluções (sem as determinar);
- demonstrar algumas propriedades das soluções (caso existam);
- construir processos de aproximar soluções.

Como base de trabalho considere-se o problema de valor inicial composto pela equação diferencial de 1ª ordem

$$y' = f(x, y) \quad (3.1.10)$$

e pela condição

$$y(x_0) = y_0.$$

3.2 Equações exactas e factores integrantes

Considerando, em (3.1.10), o caso particular $f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ obtem-se a equação

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0, \quad (3.2.1)$$

onde M e N são funções contínuas, $N \neq 0$, com as derivadas parciais M'_y e N'_x contínuas, no rectângulo

$$S = \{(x, y) : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b, a, b \in \mathbb{R}^+\}. \quad (3.2.2)$$

A equação (3.2.1) é **exacta** se existir uma função $F(x, y)$ tal que

$$F'_x(x, y) = M(x, y) \text{ e } F'_y(x, y) = N(x, y). \quad (3.2.3)$$

O tipo de designação advem do facto de $M + Ny' = F'_x + F'_y y$ ser exactamente a derivada de F em relação à variável independente x . Então

$$F(x, y) = c$$

é solução de (3.2.1), a qual poderá ser encontrada seguindo a metodologia da demonstração (construtiva) do seguinte teorema:

Teorema 3.2.1 *Sejam $M(x, y)$ e $N(x, y)$ duas funções contínuas com as derivadas parciais $M'_y(x, y)$ e $N'_x(x, y)$ contínuas, no rectângulo S dado por (3.2.2). Então a equação diferencial (3.2.1) é exacta se, e só se,*

$$M'_y(x, y) = N'_x(x, y). \quad (3.2.4)$$

Dem. Se (3.2.1) é exacta então, por (3.2.3), $F''_{xy} = M'_y$ e $F''_{yx} = N'_x$. Pela continuidade de M'_y e N'_x tem-se $F''_{xy} = F''_{yx}$.

Reciprocamente, suponha-se que M e N verificam (3.2.4) e construa-se, para provar que (3.2.1) é exacta, uma função F que satisfaça (3.2.3).

Integrando ambos os membros de $F'_x(x, y) = M(x, y)$ em ordem a x , obtém-se

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x M(s, y) ds + g(y), \quad (3.2.5)$$

sendo $g(y)$ uma função arbitrária, só dependendo de y , que desempenha o papel da "constante de integração" e que pode ser obtida através da segunda relação $F'_y(x, y) = N(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(s, y) ds + g'(y) = \int_{x_0}^x M'_y(s, y) ds + g'(y) = N(x, y),$$

e

$$g'(y) = N(x, y) - \int_{x_0}^x M'_y(s, y) ds. \quad (3.2.6)$$

Derivando em ordem a x tem-se

$$N'_x(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x M'_y(s, y) ds = N'_x(x, y) - M'_y(x, y) = 0,$$

pelo que a expressão (3.2.6) depende apenas de y .

Portanto, a função g pode ser obtida a partir de (3.2.6) e, por consequência, uma função F , que verifique (3.2.3), obtida por (3.2.5). ■

Observação 3.2.2 (i) *Integrando (3.2.6) entre y_0 e y , a função g é dada, explicitamente, por*

$$g(y) = \int_{y_0}^y N(x, t) dt - \int_{x_0}^x M(s, y) ds + \int_{x_0}^x M(s, y_0) ds + g(y_0).$$

Substituindo em (3.2.5), obtém-se a solução da equação diferencial (3.2.1):

$$F(x, y) = \int_{y_0}^y N(x, t) dt + \int_{x_0}^x M(s, y_0) ds = c. \quad (3.2.7)$$

(ii) *A escolha de x_0 e y_0 é arbitrária, sendo apenas necessário garantir que os integrais permaneçam próprios.*

Exemplo 3.2.3 *Determinar a solução do problema de valor inicial*

$$2x \operatorname{sen} y + e^x \cos y + (x^2 \cos y - e^x \operatorname{sen} y)y' = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Quando a equação diferencial (3.2.1) não é exacta pode procurar-se uma função não nula $\mu(x, y)$, chamada **factor integrante**, para a qual a equação equivalente

$$\mu(x, y)M(x, y) + \mu(x, y)N(x, y)y' = 0 \quad (3.2.8)$$

já é exacta.

Como determinar um factor integrante?

Para que a equação (3.2.8) seja exacta ter-se-á

$$[\mu(x, y)M(x, y)]'_y = [\mu(x, y)N(x, y)]'_x,$$

pelo que o factor integrante μ deverá verificar a equação

$$\mu'_y M + \mu M'_y = \mu'_x N + \mu N'_x. \quad (3.2.9)$$

Resolver esta equação com derivadas parciais não é tarefa fácil. Contudo como é apenas necessário uma solução particular de (3.2.9) pode considerar-se o factor integrante na forma

$$\mu(x, y) = A(x)B(y),$$

com $A(x)$ e $B(y)$ funções não nulas a determinar.

Substituindo em (3.2.9):

$$A(x)B'(y)M + A(x)B(y)M'_y = A'(x)B(y)N + A(x)B(y)N'_x$$

ou seja

$$\frac{A'(x)N}{A(x)} - \frac{B'(y)M}{B(y)} = M'_y - N'_x. \quad (3.2.10)$$

Definindo

$$g(x) := \frac{A'(x)}{A(x)}, \quad h(y) := \frac{B'(y)}{B(y)}$$

e primitivando, tem-se que (3.2.10) é verificada desde que

$$A(x) = e^{\int g(x)dx} \quad \text{e} \quad B(y) = e^{\int h(y)dy}.$$

Exemplo 3.2.4 A equação diferencial

$$y - y^2 + xy' = 0 \quad (3.2.11)$$

não é exacta. Procure-se um factor integrante do tipo $\mu(x, y) = x^m y^n$. Neste caso a equação (3.2.10) assume a forma

$$m - n(1 - y) = -2y$$

pelo que $m = n = -2$. Assim, multiplicando (3.2.11) por $\mu(x, y) = x^{-2}y^{-2}$, obtém-se a equação exacta

$$x^{-2}(y^{-1} - 1) + x^{-1}y^{-2}y' = 0,$$

cuja solução, por (3.2.7) com $y_0 = 1$, é dada por

$$F(x, y) = \int_1^y x^{-1}t^{-2}dt = c$$

ou seja

$$y = \frac{1}{1 - cx}.$$

Exemplo 3.2.5 De um modo mais geral pode olhar-se para um factor integrante do tipo $\mu = \mu(v)$ com v uma função de x e y , conhecida. Neste caso, de (3.2.9), obtém-se

$$\frac{1}{\mu}\mu'(v) = \frac{N'_x - M'_y}{v'_y M - v'_x N}. \quad (3.2.12)$$

Se o 2º membro de (3.2.12) depender apenas de v , por exemplo uma função $\phi(v)$, então o factor integrante é dado por

$$\mu(x, y) = e^{\int \phi(v)dv}.$$

Exercício 3.2.6 Determine uma expressão para o factor integrante nos casos particulares em que $v = x$ e $v = y$.

Curiosamente, a partir de dois factores integrantes de (3.2.1) é possível encontrar uma solução:

Lema 3.2.7 Se a equação (3.2.1) for exacta e admitir o factor integrante $\mu(x, y)$ constante, distinto de $c \in \mathbb{R}$, então $\mu(x, y) = c$ é uma solução de (3.2.1).

Dem. Por (3.2.9) e pela hipótese, $\mu'_y M = \mu'_x N$.

Multiplicando (3.2.1) por μ'_y obtem-se

$$\mu'_y M + \mu'_y N y' = N (\mu'_x + \mu'_y y') = N \frac{d\mu}{dx} = 0,$$

pelo que $\mu(x, y) = c$ é solução de (3.2.1). ■

Teorema 3.2.8 *Se $\mu_1(x, y)$ e $\mu_2(x, y)$ são dois factores integrantes de (3.2.1) em que o seu cociente não é constante, então $\mu_1(x, y) = c\mu_2(x, y)$ é uma solução de (3.2.1).*

Dem. As equações $\mu_1 M + \mu_1 N y' = 0$ e $\mu_2 M + \mu_2 N y' = 0$ são exactas.

Multiplicando a segunda por $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ obtem-se a primeira (exacta), pelo que admite o factor integrante $\frac{\mu_1}{\mu_2}$. Pelo Lema 3.2.7, $\frac{\mu_1}{\mu_2} = c$ é uma solução da segunda equação, logo de (3.2.1). ■

3.3 Equações elementares de 1ª ordem

Existem equações diferenciais de 1ª ordem que se podem solucionar por técnicas elementares de primitivação precedidas, eventualmente, por uma mudança de variável

3.3.1 Equação de variáveis separáveis

Considerando em (3.2.1) o caso particular de $M(x, y) = X_1(x)Y_1(y)$ e $N(x, y) = X_2(x)Y_2(y)$ então tomará a forma

$$X_1(x)Y_1(y) + X_2(x)Y_2(y)y' = 0. \quad (3.3.1)$$

Se $Y_1(y)X_2(x) \neq 0$ para $(x, y) \in S$, dado por (3.2.2), então (3.3.1) pode ser escrita como uma equação exacta

$$\frac{X_1(x)}{X_2(x)} + \frac{Y_2(y)}{Y_1(y)}y' = 0 \quad (3.3.2)$$

na qual as variáveis estão separadas. Assim a equação diferencial (3.3.2) diz-se de **variáveis separadas** e a sua solução, por (3.2.7), é dada por

$$\int \frac{X_1(x)}{X_2(x)} dx + \int \frac{Y_2(y)}{Y_1(y)} dy = c, \quad (3.3.3)$$

em que as constantes de primitivação estão contidas em c .

Esta relação contém todas as soluções de (3.3.1) em que $Y_1(y)X_2(x) \neq 0$. Ao dividir (3.3.1) por $Y_1(y)X_2(x)$ pode ter-se perdido algumas soluções, que devem ser anexadas a (3.3.3), bem como as que não estejam aqui incluídas para algum c , de modo a serem obtidas todas as soluções de (3.3.1).

Exemplo 3.3.1 A equação (3.2.11) também pode ser escrita como

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y^2 - y} y' = 0, \quad xy(y - 1) \neq 0.$$

Por (3.3.3) tem-se as soluções

$$y = (1 - cx)^{-1}. \quad (3.3.4)$$

Outras possíveis soluções para os quais $x(y^2 - y) = 0$ são $x = 0, y = 0$ e $y = 1$.

Contudo $y = 1$ já está incluída em (3.3.4) (caso de $c = 0$) e $x = 0$ não é solução.

Assim todas as soluções de (3.2.11) são dadas por (3.3.4) e $y = 0$.

3.3.2 Equação homogénea

Uma função $f(x, y)$ definida num domínio $D \subseteq \mathbb{R}^2$, aberto e conexo, diz-se **homogénea** de grau k se, para todo o parâmetro real λ e $(x, y) \in D$,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y).$$

Considerando $\lambda = \frac{1}{x}$ a relação ficará

$$x^k f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x, y)$$

o que permite concluir que uma função homogénea de grau 0 é uma função de uma única variável $u := \frac{y}{x}$.

Uma equação diferencial

$$y'(x) = f(x, y) \quad (3.3.5)$$

diz-se **homogénea** se f for uma função homogénea de grau 0.

Nestes casos, com a mudança de variável indicada, procuram-se soluções do tipo $y(x) = xu(x)$, sendo u uma função a determinar. Substituindo $y'(x) = u(x) + xu'(x)$ em (3.3.5) obtém-se, pelo facto de f ser homogénea de grau 0,

$$u + xu' = f(x, xu) = f(1, u) := \varphi(u)$$

o que conduz a uma equação de variáveis separadas do tipo

$$\frac{u'}{\varphi(u) - u} = \frac{1}{x}.$$

Exemplo 3.3.2 Determinar a solução da equação homogênea

$$y'(x) = \frac{2xy}{x^2 - 3y^2}.$$

3.3.3 Equação homogênea

Uma equação diferencial da forma

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad (3.3.6)$$

onde a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 e c_2 são constantes reais, designa-se por equação **homogênea**.

Se $c_1 = c_2 = 0$ a equação é homogênea.

Se c_1 e c_2 não são simultaneamente nulos, a equação pode transformar-se numa equação homogênea, com uma mudança de variável adequada, de acordo com o tipo de relações verificadas pelos coeficientes:

No caso em que $a_1b_2 \neq a_2b_1$ efectuam-se as transformações

$$x = u + h, \quad y = v + k,$$

onde h e k são soluções do sistema linear

$$\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{cases},$$

obtendo-se a equação homogênea

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right).$$

Se $a_1b_2 = a_2b_1$ então $a_1x + b_1y$ é proporcional a $a_2x + b_2y$. Assim a equação (3.3.6) pode escrever-se na forma

$$y' = f(\alpha x + \beta y)$$

e resolvida com a substituição $z := \alpha x + \beta y$.

Exemplo 3.3.3 Calcular a solução do problema de valor inicial

$$y' = \frac{y - 2x + 3}{2y - x}, \quad y(3) = 2.$$

3.3.4 Equação linear de 1ª ordem

O aspecto geral de uma equação diferencial linear de 1ª ordem será

$$p_0(x)y' + p_1(x)y = r(x).$$

Considere-se $p_0(x)$, $p_1(x)$ e $r(x)$ funções contínuas e $p_0(x) \neq 0$ num certo intervalo I . Neste caso a equação anterior pode escrever-se na forma

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (3.3.7)$$

com $p(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)}$ e $q(x) = \frac{r(x)}{p_0(x)}$ funções contínuas em I .

A equação homogénea correspondente

$$y' + p(x)y = 0 \quad (3.3.8)$$

pode ser resolvida por uma separação de variáveis

$$\frac{1}{y}y' = -p(x)$$

e, com a correspondente primitivação,

$$y(x) = c e^{-\int p(x)dx}. \quad (3.3.9)$$

Ao dividir-se (3.3.8) por y , "perdeu-se" a solução $y \equiv 0$, que é designada por **solução trivial**, já que (3.3.8) admite sempre esta solução nula. Contudo, apesar disso, esta solução já está incluída em (3.3.9) (basta fazer $c = 0$).

Para um problema de valor inicial formado por (3.3.8) e $y(x_0) = y_0$, com $x_0 \in I$, então a solução será

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$$

A resolução da equação completa (3.3.7) também pode ser reduzida a um caso de primitivação: multiplicando-a por $e^{\int p(x)dx}$ obtem-se

$$\begin{aligned} e^{\int p(x)dx} [y' + p(x)y] &= e^{\int p(x)dx} q(x) \\ \left(y e^{\int p(x)dx} \right)' &= e^{\int p(x)dx} q(x) \\ y e^{\int p(x)dx} &= c + \int e^{\int p(x)dx} q(x) dx \end{aligned}$$

sendo a solução dada por

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left(c + \int e^{\int p(x)dx} q(x) dx \right). \quad (3.3.10)$$

Observação 3.3.4 Esta solução $y(x)$ é da forma $c u(x) + v(x)$, pelo que a solução geral da equação linear completa (3.3.7) se pode obter pela adição entre a solução (geral) da equação homogênea (3.3.8) e uma solução particular de (3.3.7).

Caso se pretenda a solução do problema de valor inicial correspondente, tratar-se-ia apenas de encontrar o elemento da família de soluções (3.3.10) que passa pelo ponto (x_0, y_0) , isto é,

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(s)ds} \left(y_0 + \int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^t p(s)ds} q(t)dt \right).$$

Note-se que se $p(x)$ e $q(x)$ forem funções constantes, por exemplo, $p(x) \equiv p$ e $q(x) \equiv q$, a solução ficará

$$y(x) = \left(y_0 - \frac{q}{p} \right) e^{p(x_0-x)} + \frac{q}{p}.$$

Exemplo 3.3.5 Determinar a solução do problema de valor inicial

$$xy' - 4y + 2x^2 + 4 = 0, \quad x \neq 0, \quad y(1) = 1.$$

Se forem conhecidas duas soluções particulares de (3.3.7), $y_1(x)$ e $y_2(x)$, então

$$\begin{aligned} y_1'(x) - y_2'(x) &= -p(x)y_1(x) + q(x) + p(x)y_2(x) - q(x) \\ &= -p(x)[y_1(x) - y_2(x)]. \end{aligned}$$

Assim a função $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ é solução da equação homogênea associada e, pela Observação 3.3.4, as funções

$$y(x) = c(y_1(x) - y_2(x)) + y_1(x) \quad \text{e} \quad y(x) = c(y_1(x) - y_2(x)) + y_2(x)$$

são soluções gerais da equação completa (3.3.7).

Algumas equações diferenciais não lineares de 1ª ordem podem ser reduzidas a equações lineares recorrendo a mudanças de variável adequadas:

3.3.5 Equação de Bernoulli

Uma equação da forma

$$p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x) y^n, \quad n \neq 0, 1,$$

com $p_1(x)$, $p_0(x)$ e $r(x)$ funções contínuas, $p_1(x) \neq 0$, designa-se por **equação de Bernoulli**.

Exclui-se $n = 0$ e $n = 1$ porque nestes casos a equação seria linear.

A equação anterior é equivalente a

$$p_1(x) y^{-n} y' + p_0(x) y^{1-n} = r(x)$$

e, fazendo a substituição $v = y^{1-n}$, obtém-se a equação linear de 1ª ordem

$$\frac{1}{1-n} p_1(x) v' + p_0(x) v = r(x).$$

Exemplo 3.3.6 *Calcular a solução do problema de valor inicial*

$$y' + x^2 y = e^{x^3} \frac{y^4}{3}, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

3.3.6 Equação de Riccati

Uma equação não linear de 1ª ordem do tipo

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \quad (3.3.11)$$

com $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ funções contínuas num certo intervalo I , designa-se por **equação de Riccati**.

Se for conhecida uma solução de (3.3.11), $y_1(x)$, (a qual poderá não ser solução do problema de valor inicial) a substituição

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$$

transforma-a numa equação linear de 1ª ordem em z . De facto

$$\begin{aligned} y_1' - \frac{z'}{z^2} &= p(x) \left(y_1 + \frac{1}{z} \right)^2 + q(x) \left(y_1 + \frac{1}{z} \right) + r(x) \\ &= [p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + r(x)] + p(x) \left(\frac{2y_1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) + q(x) \frac{1}{z} \end{aligned}$$

donde

$$-\frac{z'}{z^2} = [2p(x)y_1 + q(x)] \frac{1}{z} + p(x) \frac{1}{z^2}$$

e

$$z' + [2p(x)y_1 + q(x)] z + p(x) = 0.$$

Exemplo 3.3.7 *Determinar a solução do problema de valor inicial*

$$y' = -2xy^2 + (2x + 4x^2)y - 2x^3 - 2x^2 + 1, \quad y(0) = \frac{1}{2},$$

sabendo que $y_1(x) = x$ é solução da equação.

As equações diferenciais lineares de 1ª ordem têm um leque muito variado de aplicações.

A variável independente x representa vulgarmente "tempo". O 2º membro $q(x)$ pode ter um significado físico, como uma força. A solução $y(x)$ poderá significar um deslocamento ou uma outra quantidade física.

De uma forma geral, a equação (3.3.7) pode modelar uma relação de *input-output*, considerando $q(x)$ como as quantidades de **input** e $y(x)$ como a resposta de **output**.

3.4 Equações lineares de 2ª ordem

Para a equação homogénea linear de 2ª ordem com coeficientes variáveis

$$p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \quad (3.4.1)$$

com $p_2(x) (> 0)$, $p_1(x)$ e $p_0(x)$ funções contínuas num intervalo I , não existe nenhum método para a resolver, excepto em alguns casos particulares.

Os resultados que se seguem resultam da adaptação à 2ª ordem da teoria mais geral de sistemas de equações diferenciais lineares de 1ª ordem, a desenvolver mais tarde no próximo capítulo, mais concretamente nos Teoremas 4.2.1 a 4.2.3.

Teorema 3.4.1 *Existem exactamente duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de (3.4.1) linearmente independentes num intervalo I . Isto é, não existe uma constante c tal que $y_1(x) = c y_2(x)$, para $x \in I$.*

Teorema 3.4.2 *Duas soluções de (3.4.1), $y_1(x)$ e $y_2(x)$, são linearmente independentes em I se o seu **Wronskiano** definido por*

$$W(x) = W(y_1, y_2)(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \quad (3.4.2)$$

for diferente de 0 para algum $x = x_0 \in I$.

Teorema 3.4.3 *O Wronskiano (3.4.2) verifica a igualdade de Abel*

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x \frac{p_1(t)}{p_2(t)} dt}, \quad x_0 \in I.$$

Assim, se o Wronskiano se anula para algum $x_0 \in I$ então anula-se para todo o $x \in I$.

Teorema 3.4.4 *Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções de (3.4.1) e c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, então $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ é também uma solução de (3.4.1).*

Além disso, se $y_1(x)$ e $y_2(x)$, são linearmente independentes então qualquer solução $y(x)$ de (3.4.1) pode ser escrita na forma $y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$, com k_1 e k_2 constantes adequadas.

3.4.1 Redução de ordem

Se for conhecida uma solução **não trivial** de (3.4.1), $y_1(x)$, então pode encontrar-se uma segunda solução $y_2(x)$ que seja da forma

$$y_2(x) = u(x) y_1(x).$$

Substituindo na equação tem-se

$$\begin{aligned} p_2(u y_1)'' + p_1(u y_1)' + p_0 u y_1 &= 0 \\ p_2 u'' y_1 + 2p_2 u' y_1' + p_2 u y_1'' + p_1 u' y_1 + p_1 u y_1' + p_0 u y_1 &= 0 \\ p_2 u'' y_1 + (2p_2 y_1' + p_1 y_1) u' + (p_2 y_1'' + p_1 y_1' + p_0 y_1) u &= 0. \end{aligned}$$

Como $y_1(x)$ solução de (3.4.1), a última parcela anula-se e com a substituição $v = u'$ obtem-se

$$p_2 y_1 v' + (2p_2 y_1' + p_1 y_1) v = 0. \quad (3.4.3)$$

Esta equação linear de 1ª ordem pode ser resolvida em I multiplicando-a por $\frac{y_1}{p_2}$ tem-se

$$\begin{aligned} y_1^2 v' + 2y_1' y_1 v + \frac{p_1}{p_2} y_1^2 v &= 0 \\ (y_1^2 v)' + \frac{p_1}{p_2} y_1^2 v &= 0 \end{aligned}$$

pelo que

$$y_1^2 v = c e^{-\int \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx}.$$

Considerando $c = 1$, obtem-se

$$v = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx} := u',$$

sendo então a segunda solução dada por

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx} dx. \quad (3.4.4)$$

Exemplo 3.4.5 Calcular a solução geral da equação de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad x \in]-1, 1[,$$

sabendo que $y(x) = x$ é uma solução.

3.4.2 Solução particular da equação não homogênea

Para encontrar uma solução particular para a equação não homogênea

$$p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x), \quad (3.4.5)$$

sendo $r(x)$ uma função contínua em I , utilizar-se-á o **método da variação dos parâmetros**:

Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções de (3.4.1) e as "constantes" c_1 e c_2 consideradas como funções da variável independente x .

Suponha-se que

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

é solução de (3.4.5). Para determinar as duas funções incógnitas $c_1(x)$ e $c_2(x)$ necessita-se de duas condições:

Como

$$y' = c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2'$$

a primeira condição a exigir será

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0. \quad (3.4.6)$$

Diferenciando

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2'$$

tem-se

$$y'' = c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1'y_1' + c_2'y_2'.$$

Substituindo em (3.4.5), obtem-se

$$c_1(p_2 y_1'' + p_1 y_1' + p_0 y_1) + c_2(p_2 y_2'' + p_1 y_2' + p_0 y_2) + p_2(c_1' y_1' + c_2' y_2') = r(x)$$

e, como y_1 e y_2 são soluções de (3.4.1),

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = \frac{r(x)}{p_2(x)}. \quad (3.4.7)$$

Resolvendo o sistema (3.4.6)-(3.4.7), ter-se-á

$$c_1' = -\frac{\frac{y_2(x) r(x)}{p_2(x)}}{W(y_1, y_2)(x)}, \quad c_2' = \frac{\frac{y_1(x) r(x)}{p_2(x)}}{W(y_1, y_2)(x)}.$$

Assim, uma solução particular de (3.4.5), $y_p(x)$, será

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \\ &= -y_1(x) \int \frac{\frac{y_2(x) r(x)}{p_2(x)}}{W(y_1, y_2)(x)} dx + y_2(x) \int \frac{\frac{y_1(x) r(x)}{p_2(x)}}{W(y_1, y_2)(x)} dx. \end{aligned}$$

A solução geral de (3.4.5) obtem-se adicionando a esta solução particular a solução geral da equação homogênea associada:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x).$$

3.4.3 Equação homogênea com coeficientes constantes

Definida uma técnica para encontrar a solução particular, como obter a solução da equação homogênea associada? No caso de os coeficientes serem constantes, isto é, para

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \quad (3.4.8)$$

será "razoável" esperar que, à semelhança do que sucedia nas equações de 1º ordem, as soluções assumam a forma de exponenciais, já que as derivadas de e^{rx} conduzem sempre à mesma exponencial multiplicada por uma constante.

Se se experimentar $y = e^{rx}$ e procurar os valores de r adequados, obtem-se

$$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = (ar^2 + br + c) e^{rx} = 0.$$

Então e^{rx} é solução de (3.4.8) se r for solução da equação

$$ar^2 + br + c = 0, \quad (3.4.9)$$

designada por **equação característica**.

Como é conhecido há três casos possíveis:

1. Se existirem **duas raízes reais distintas**, r_1 e r_2 , então $e^{r_1 x}$ e $e^{r_2 x}$ são duas soluções de (3.4.8), e a solução geral será

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

2. Se existir **uma raiz real dupla**, $r_1 = r_2 = r = -\frac{b}{2a}$, e^{rx} é uma solução. A segunda solução pode ser encontrada por (3.4.4):

$$y_2(x) = e^{rx} \int \frac{1}{(e^{rx})^2} e^{-\int \frac{b}{a} dx} dx = e^{rx} x,$$

sendo a solução geral dada por

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{rx}.$$

3. Se existirem **duas raízes complexas conjugadas**, $r = \alpha \pm \beta i$, então as soluções serão da forma

$$e^{(\alpha \pm \beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x \pm i \operatorname{sen} \beta x).$$

Como a parte real ($e^{\alpha x} \cos \beta x$) e o coeficiente da parte imaginária ($e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$) são ambas soluções de (3.4.8), a solução geral será

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$$

Exemplo 3.4.6 Encontrar a solução geral da equação

$$y'' - 5y' + 6y = e^x.$$

Apesar de os casos anteriores serem obtidos para equações com coeficientes constantes, esta metodologia pode ser aplicada a outras situações:

Exercício 3.4.7 Utilizando uma função do tipo $y(x) = x^m$ discuta, em função de m , as várias formas que a solução geral da equação de Cauchy-Euler

$$x^2 y'' + ax y' + by = 0, \quad x > 0, \quad (3.4.10)$$

pode assumir.

Resolução: Calculando as derivadas e substituindo, obtém-se

$$x^2 m(m-1) x^{m-2} + ax m x^{m-1} + bx^m = 0$$

e

$$m(m-1) + am + b = 0,$$

que é a equação característica de (3.4.10). Assim a natureza das raízes determina a solução:

- Raízes reais distintas $m_1 \neq m_2$: a solução será $y(x) = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$;
- Raíz real dupla $m = m_1 = m_2$: a solução será $y(x) = c_1 x^m + c_2 \ln x x^m$;
- Raízes complexas conjugadas $m_1 = \alpha + \beta i$, $m_2 = \alpha - \beta i$: a solução será

$$y(x) = c_1 x^\alpha \cos(\beta \ln x) + c_2 x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x).$$

3.5 Exercícios

1. Resolva os problemas de valor inicial:

a) $3x^2y + 8xy^2 + (x^3 + 8x^2y + 12y^2) y' = 0, \quad y(2) = 1$

b) $ye^{xy} + 4y^3 + (xe^{xy} + 12xy^2 - 2y) y' = 0, \quad y(0) = 2.$

2. Determine o valor de k de modo a que as equações sejam diferenciais exactas e encontre a expressão geral das soluções:

a) $(kx^2 + 4y) y' = -x^3 - 3xy$

b) $\frac{kx+1}{y^3} y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$

3. Resolva as equações diferenciais utilizando um factor integrante do tipo indicado:

a) $x - y^2 + 2xyy' = 0, \quad [\mu(x)]$

b) $y + (y^2 - x) y' = 0, \quad [\mu(y)]$

c) $3xy + y^2 + (3xy + x^2) y' = 0, \quad [\mu(x + y)]$

d) $x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + yy' = 0, \quad [\mu(x^2 + y^2)]$

4. Prove que:

a) $u(x, y) = c$ é solução geral da equação (3.2.1) se e só se $M \frac{\partial u}{\partial y} = N \frac{\partial u}{\partial x}$.

b) a equação (3.2.1) tem um factor integrante $\frac{1}{M^2+N^2}$ se $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$ e $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}$.

5. Encontre a solução geral das equações diferenciais:

a) $x \operatorname{sen} y + (x^2 + 1) \cos y y' = 0$

b) $xy' - y = x e^{\frac{y}{x}}$

c) $y' = \frac{3x-y-5}{3y-x+7}$

6. Determine a solução geral das equações diferenciais:

a) $y' - (\cot x) y = 2x \operatorname{sen} x$

b) $y' + y + x + x^2 + x^3 = 0$

c) $2(1 + y^3) + 3xy^2y' = 0$

d) $(1 - x^2)y' + y^2 - 1 = 0$

7. Numa situação "ideal" de divisão celular, o número de células no instante t , $N(t)$, cresce exponencialmente e pode ser traduzido pela relação

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N,$$

sendo $\lambda \in \mathbb{R}^+$ a razão de crescimento. Contudo, nos tumores sólidos, existe uma constante, α , de retardamento do crescimento, que está relacionada com a necrose das células centrais do tumor. Neste caso o número de células é modelado por

$$\frac{dN}{dt} = \lambda e^{-\alpha t} N$$

a) Determine a expressão que permite calcular o número de células do tumor sólido em função do tempo.

b) Qual o número de células limite que o tumor poderá atingir?

c) Suponha que, quando foi detectado, o tumor possuía 10^4 células, crescia à razão de 20% por unidade de tempo, sendo a constante de retardamento de 0,02.

Qual o número de células limite que o tumor irá atingir ?

8. Arnesto, o desgraçado, foi encontrado morto na sua casa às 23h.

Bicente, o detective, chegou ao local do crime às 23h 30m e registou a temperatura da vítima: $30^\circ C$.

Chico, o esperto, observou que às 00h 30m a temperatura do corpo era de $25^\circ C$ e que a temperatura da sala se mantinha constantemente igual a $20^\circ C$.

Diga a que horas ocorreu o crime.

E não esqueça a lei do arrefecimento de Newton: *a velocidade de arrefecimento de um corpo é proporcional à diferença entre a sua temperatura em cada instante e a do meio ambiente.*

9. (Princípio da Sobreposição) Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções de

$$y' + p(x)y = q_i(x), \quad i = 1, 2,$$

respectivamente, prove que $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ é uma solução da equação diferencial

$$y' + p(x)y = c_1 q_1(x) + c_2 q_2(x), \quad (3.5.1)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

10. Considere a equação diferencial

$$y'' + 3xyy' = 0, \quad x \in]0, +\infty[.$$

a) Mostre que as funções $y_1(x) = c (\neq 0)$ e $y_2(x) = \frac{1}{x^2}$ são soluções da equação mas $y_1(x) + y_2(x)$ não o é.

b) Comente a afirmação : O Teorema 3.4.4 apenas é válido para equações lineares.

11. Dada a solução $y_1(x)$ encontre a segunda solução das equações diferenciais:

a) $(x^2 - 1)y'' + (3x - 1)y' + y = 0, \quad x \neq 0, 1, \quad y_1(x) = \frac{1}{x-1}$

b) $xy'' - y' - 4x^3y = 0, \quad x \neq 0, \quad y_1(x) = e^{x^2}.$

12. Sejam $y_1(x) \neq 0$ e $y_2(x)$ duas soluções linearmente independentes da equação (3.4.1). Prove que $y(x) = \frac{y_2(x)}{y_1(x)}$ é uma solução não constante de

$$y_1(x)y'' + \left(2y_1'(x) + \frac{p_1(x)}{p_2(x)}y_1(x)\right)y' = 0.$$

13. Encontre a solução completa das equações não homogêneas:

a) $y'' + 4y = \operatorname{sen}(2x)$

b) $y'' + 4y' + 3y = e^{-3x}$

c) $y'' + 5y' + 4y = e^{-4x}.$

14. Prove que se a parte real de todas as soluções da equação característica (3.4.9) são negativas então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$$

para toda a solução $y(x)$ de (3.4.8).

3.6 Actividades

Actividade 1:

1.1. *"Descoberta de um esqueleto no deserto de Djourab, no Chade,...,que pode ser o mais antigo dos homens. Pensa-se que poderá ter entre 6 e 7 milhões de anos."* (Revista "Nature", 2002/07/11)

Sabendo que:

- A data de um esqueleto se calcula através da medida da quantidade de carbono radioactivo (C^{14}) existente nos ossos.
- Na atmosfera e nos organismos vivos a razão entre C^{14} e o carbono ordinário (C^{12}) é constante.
- Quando o organismo morre, a absorção de C^{14} , pela respiração e alimentação, termina.

Designe por $y(t)$ a quantidade de C^{14} existente num organismo no tempo t , dado em milhares de anos (MA).

a) Sabendo que a taxa de variação com o tempo, $\frac{dy}{dt}$, é proporcional à quantidade de C^{14} , escreva e resolva a equação diferencial que modela a desagregação radioactiva do C^{14} com o tempo.

b) Sabendo que o tempo de semi-vida do C^{14} , isto é, o tempo que decorre até que a massa de C^{14} atinja metade do valor da sua massa inicial, é de $5.73 MA$, calcule a constante de proporcionalidade do modelo.

c) Admita que num certo organismo se encontra a quarta parte do C^{14} inicial. Faça uma estimativa da "idade" do organismo.

d) Que parte de C^{14} encontraram no esqueleto do *Djourab* para que o pudessem datar com 6 milhões de anos ?

1.2. Determine uma expressão geral para um factor integrante $\mu(v)$, sendo v uma função de x e y , de modo a que a equação (3.2.8) seja exacta, para os casos em que:

- a)** $v = x - y$
- b)** $v = xy$
- c)** $v = \frac{x}{y}$
- d)** $v = x^2 + y^2$.

Actividade 2:

2.1. Um caso particular da equação de Bernoulli (??) é a **equação de Verhulst**

$$y' - Ay = -By^2, \quad (A, B \in \mathbb{R}^+).$$

a) Prove que a solução da equação é dada por

$$y = \frac{1}{\frac{B}{A} + c e^{-Ax}}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad (3.6.1)$$

designada por **lei logística** e utilizada para modelar o comportamento de populações.

b) Faça um esboço gráfico da família de soluções dadas por (3.6.1).

c) Caracterize o comportamento das populações ao longo do tempo quando :

(i) $0 < A < B$

(ii) $A = B$

(iii) $0 < B < A$

2.2. Considere o **problema com valores na fronteira**

$$-y'' = f(x) \quad (3.6.2)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \quad (3.6.3)$$

a) Aplicando o método da variação dos parâmetros mostre que a solução geral da equação (3.6.2) pode ser escrita na forma

$$y(x) = c_1 + c_2 x - \int_0^x (x-s)f(s)ds,$$

sendo c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

b) Se $y(x)$ é solução do problema (3.6.2), (3.6.3) então

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \int_0^1 (1-s)f(s)ds.$$

c) Mostre que a solução do problema (3.6.2), (3.6.3), $y(x)$, pode ser escrita como

$$y(x) = \int_0^x s(1-x)f(s)ds + \int_x^1 x(1-s)f(s)ds.$$

d) Prove que a solução anterior se pode escrever na forma

$$y(x) = \int_0^1 G(x, s) f(s) ds$$

sendo

$$G(x, s) := \begin{cases} s(1-x) & , \quad 0 \leq s \leq x \\ x(1-s) & , \quad x \leq s \leq 1 \end{cases} ,$$

designada como **função de Green** associada ao problema (3.6.2), (3.6.3).

Actividade 3:

3.1. A equação diferencial

$$xy'' - (x+n)y' + ny = 0$$

é interessante porque possui duas soluções de tipos diferentes: uma solução exponencial e uma polinomial.

a) Verifique que uma solução é $y_1(x) = e^x$.

b) Mostre que a segunda solução tem a forma $y_2(x) = c e^x \int_0^x t^n e^{-t} dt$.

c) Se $c = \frac{1}{n!}$, prove que

$$y_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Repare que $y_2(x)$ contem os primeiros $n+1$ termos da série de Mac-Laurin para e^x , isto é, para $y_1(x)$.

3.2. Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções da equação diferencial

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \quad x \in I.$$

Prove que:

a) Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ se anulam no mesmo ponto de I , então

$$y_1(x) = ky_2(x).$$

b) Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ têm máximos ou mínimos no mesmo ponto do intervalo aberto I , então $y_1(x)$ e $y_2(x)$ não são soluções linearmente independentes.

c) Se $W(y_1, y_2)$ é independente de x , então $p_1(x) = 0, \forall x \in I$.

d) Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes então $y_1(x)$ e $y_2(x)$ não podem ter um ponto de inflexão comum em I , a menos que $p_1(x)$ e $p_2(x)$ se anulem simultaneamente nesse ponto.

e) Se $W(y_1, y_2)(x^*) = y_1(x^*) = 0$, então, ou $y_1(x) \equiv 0$ em I , ou

$$y_2(x) = \frac{y_2'(x^*)}{y_1'(x^*)} y_1(x).$$

Capítulo 4

Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias

Neste capítulo o aluno deverá:

- Utilizar conceitos e métodos relativos a sistemas lineares de equações diferenciais, tais como: espaço vectorial de soluções, wronskiano, matriz fundamental e sistema fundamental de soluções,...
- Aplicar propriedades da Álgebra Linear (como, por exemplo, dimensão de um espaço vectorial, sistemas homogêneos e não homogêneos, valores e vectores próprios e respectiva multiplicidade,...) a sistemas de equações diferenciais com coeficientes constantes.
- Saber determinar a exponencial de uma matriz constante, tendo em conta a natureza, sinal e multiplicidade dos valores próprios, e aplicá-la na resolução de sistemas lineares.
- Identificar condições suficientes para a existência de soluções periódicas e/ou limitadas de um sistema de equações diferenciais lineares.
- Analisar o comportamento assintótico das soluções de sistemas lineares.
- Reconhecer condições suficientes para que as soluções de sistemas lineares permaneçam limitadas ou se tornem ilimitadas "no infinito".
- Relacionar propriedades da matriz fundamental com o tipo de comportamento assintótico.

- Reconheça as relações entre limitação e estabilidade de soluções nos casos de sistemas lineares homogêneos e não homogêneos.
- Relacione o estudo e o tipo de estabilidade das soluções dos sistemas de equações diferenciais quasi-lineares com os valores próprios da matriz associada à parte linear, bem como com o tipo de estabilidade do sistema linear associado.
- Identifique o retrato-fase das soluções dos sistemas autónomos bidimensionais.
- Determine e classifique os pontos críticos das soluções dos sistemas autónomos planares, quanto ao seu campo de direcções e ao tipo de estabilidade, de acordo com a natureza, sinal e multiplicidade dos valores próprios.
- Averigue a existência de ciclos-limite num sistema de equações diferenciais, e identifique condições suficientes para a sua existência ou inexistência.

4.1 Introdução e notações

No capítulo anterior consideraram-se apenas equações e problemas escalares de valor inicial. Será agora natural generalizá-los a sistemas de equações diferenciais de 1ª ordem e de ordem superior.

Um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem pode escrever-se na forma

$$\begin{aligned}
 u_1' &= g_1(x, u_1, \dots, u_n) \\
 u_2' &= g_2(x, u_1, \dots, u_n) \\
 &\vdots \\
 u_n' &= g_n(x, u_1, \dots, u_n).
 \end{aligned}
 \tag{4.1.1}$$

Este tipo de sistemas aparece em vários ramos da Ciência, mas também têm interesse pela sua relevância na Matemática. Como exemplo, refira-se que uma equação diferencial de ordem n , como

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right),$$

se pode escrever como um sistema do tipo (4.1.1). De facto, efectuando as mudanças de variável $y^{(i)} = u_{i+1}$, $0 \leq i \leq n-1$, obtem-se

$$\begin{cases} u'_i = u_{i+1}, 0 \leq i \leq n-1, \\ u'_n = f(x, u_1, \dots, u_n). \end{cases}$$

Ao longo deste Capítulo consideram-se g_1, \dots, g_n como funções contínuas num conjunto aberto $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Uma solução u do sistema (4.1.1), num intervalo I , representa um conjunto de n funções $u_1(x), \dots, u_n(x)$ tais que:

- a) $u'_1(x), \dots, u'_n(x)$ existem para $x \in I$;
- b) para $x \in I$ os pontos $(x, u_1(x), \dots, u_n(x)) \in E$;
- c) $u'_i = g_i(x, u_1, \dots, u_n)$, para $x \in I$.

Ao sistema (4.1.1) podem também ser adicionadas condições iniciais do tipo

$$u_1^0(x_0) = u_1^0, \dots, u_n^0(x_0) = u_n^0, \quad (4.1.2)$$

sendo $x_0 \in I$ um valor fixo e u_1^0, \dots, u_n^0 números dados tais que $(x_0, u_1^0, \dots, u_n^0) \in E$.

Tal como anteriormente, o sistema (4.1.1) com as condições iniciais (4.1.2) forma um **problema de valor inicial**.

O estudo da existência e unicidade de solução para o problema (4.1.1), (4.1.2) pode seguir dois processos: impondo condições suficientes às funções g_1, \dots, g_n e provando os resultados directamente ou, em alternativa, escrevendo o problema numa notação vectorial. No estudo que se segue opta-se por este segundo método, pois neste caso as demonstrações são muito semelhantes ao caso escalar.

Utilizando a notação

$$\begin{aligned} u(x) &= (u_1(x), \dots, u_n(x)), \\ g(x, u) &= (g_1(x, u), \dots, g_n(x, u)) \end{aligned}$$

e definindo que a **diferenciação** e a **integração** são efectuadas **componente a componente**, isto é,

$$\begin{aligned} u'(x) &= (u'_1(x), \dots, u'_n(x)), \\ \int_a^b u(x) dx &= \left(\int_a^b u_1(x) dx, \dots, \int_a^b u_n(x) dx \right), \end{aligned}$$

então o problema (4.1.1), (4.1.2) pode ser escrito como

$$u' = g(x, u), \quad u(x_0) = u^0, \quad (4.1.3)$$

de um modo semelhante a (3.1.10), excepto que agora $u, u' : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : E \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $u^0 = (u_1^0, \dots, u_n^0)$.

A função $g(x, u)$ diz-se **contínua** em E se todas as suas funções componentes forem contínuas em E e diz-se uniformemente Lipschitziana em E se existir $L \geq 0$ (constante de Lipschitz) tal que

$$\|g(x, u) - g(x, v)\| \leq L \|u - v\|, \quad \forall (x, u), (x, v) \in E. \quad (4.1.4)$$

Como em dimensão finita todas as normas são equivalentes não é necessário precisar qual a norma utilizada. Contudo, para comodidade de algumas demonstrações, ao longo do Capítulo utilizar-se-á, salvo indicação em contrário, a norma

$$\|u\| = \sum_{i=1}^n |u_i|.$$

Uma condição suficiente para que a função $g(x, u)$ satisfaça a condição de Lipschitz é dada pelo seguinte resultado:

Teorema 4.1.1 *Seja E um domínio convexo tal que, para $(x, u) \in E$, $\frac{\partial g}{\partial u_k}$, $k = 1, \dots, n$, existem e $\left\| \frac{\partial g}{\partial u} \right\| \leq L$. Então a função $g(x, u)$ verifica a condição (4.1.4) em E com a constante de Lipschitz L .*

Dem. Sejam (x, u) e (x, v) pontos fixos em E . Como E é convexo, para qualquer $0 \leq t \leq 1$ os pontos $(x, v + t(u - v))$ estão em E . Portanto a função vectorial $G(t) = g(x, v + t(u - v))$, $0 \leq t \leq 1$, está bem definida e

$$\begin{aligned} G'(t) &= (u_1 - v_1) \frac{\partial g}{\partial u_1}(x, v + t(u - v)) + \dots \\ &\quad + (u_n - v_n) \frac{\partial g}{\partial u_n}(x, v + t(u - v)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|G'(t)\| &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial g_i}{\partial u_1}(x, v + t(u - v)) \right| |u_1 - v_1| + \dots \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial g_i}{\partial u_n}(x, v + t(u - v)) \right| |u_n - v_n| \\ &\leq L(|u_1 - v_1| + \dots + |u_n - v_n|) = L \|u - v\|. \end{aligned}$$

A partir da relação

$$g(x, u) - g(x, v) = G(1) - G(0) = \int_0^1 G'(t) dt$$

obtem-se

$$\|g(x, u) - g(x, v)\| \leq \int_0^1 \|G'(t)\| dt \leq L \|u - v\|.$$

■

Como exemplo considere-se a função $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(x, u) = (a_{11}u_1 + a_{12}u_2, a_{21}u_1 + a_{22}u_2).$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u_1} &= (a_{11}, a_{21}), \quad \frac{\partial g}{\partial u_2} = (a_{12}, a_{22}), \\ \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \right\| &= \max \{|a_{11}| + |a_{21}|, |a_{12}| + |a_{22}|\} := L \end{aligned}$$

então tem-se

$$\begin{aligned} &\|g(x, u) - g(x, v)\| \\ &= |a_{11}(u_1 - v_1) + a_{12}(u_2 - v_2)| + |a_{21}(u_1 - v_1) + a_{22}(u_2 - v_2)| \\ &\leq (|a_{11}| + |a_{21}|) |u_1 - v_1| + (|a_{12}| + |a_{22}|) |u_2 - v_2| \\ &\leq \max \{|a_{11}| + |a_{21}|, |a_{12}| + |a_{22}|\} (|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|) \\ &= \max \{|a_{11}| + |a_{21}|, |a_{12}| + |a_{22}|\} \|u - v\|. \end{aligned}$$

Tal como no caso escalar, se $g(x, u)$ for uma função contínua no domínio E , então qualquer solução de (4.1.3) é também solução da equação integral

$$u(x) = u^0 + \int_{x_0}^x g(t, u(t)) dt \quad (4.1.5)$$

e reciprocamente.

Tal como anteriormente, pode aplicar-se o método de Picard das aproximações sucessivas para a equação (4.1.5). Assim, admitindo uma função contínua $u^0(x)$ como aproximação inicial, as iterações podem ser dadas por

$$u^{n+1}(x) = u^0 + \int_{x_0}^x g(t, u^n(t)) dt, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.1.6)$$

Se a sucessão $(u^n(x))$ converge uniformemente para uma função contínua $u(x)$ num intervalo I , que contém x_0 , e se os pontos $(x, u(x)) \in E$, então a função $u(x)$ é solução de (4.1.5).

Exemplo 4.1.2 Para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'_1 = x + u_2 \\ u'_2 = x + u_1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} u_1(0) = 1 \\ u_2(0) = -1, \end{cases} \quad (4.1.7)$$

considera-se $u^0 = (1, -1)$ e obtém-se

$$\begin{aligned} u^1(x) &= (1, -1) + \int_0^x (t-1, t+1) dt = \left(1-x + \frac{x^2}{2}, -1+x + \frac{x^2}{2}\right) \\ u^2(x) &= (1, -1) + \int_0^x \left(t-1+t + \frac{t^2}{2}, t+1-t + \frac{t^2}{2}\right) dt \\ &= \left(1-x + x^2 + \frac{x^3}{3!}, -1+x + \frac{x^3}{3!}\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

A sucessão $(u^n(x))$ existe para $x \in R$ e converge uniformemente para

$$u(x) = (-1-x + e^x + e^{-x}, -1-x + e^x - e^{-x})$$

que é a solução do problema de valor inicial (4.1.7).

4.2 Sistemas lineares

Se, no sistema (4.1.1), a função g tiver a forma

$$g(x, u) = a_{i1}(x)u_1 + a_{i2}(x)u_2 + \dots + a_{in}(x)u_n, \quad 1 \leq i \leq n,$$

então o **sistema** diz-se **linear** e pode escrever-se na forma matricial

$$u' = A(x)u + b(x), \quad (4.2.1)$$

com $A(x)$ uma matriz $n \times n$, formada pelos elementos $a_{ij}(x)$, $b(x)$ uma matriz coluna $n \times 1$ e $u(x)$ a matriz incógnita, $n \times 1$, com as componentes $u_i(x)$.

Por analogia com o caso escalar, a existência e unicidade de solução para o sistema (4.2.1) com as condições iniciais

$$u(x_0) = u^0, \quad (4.2.2)$$

num intervalo I que contenha x_0 , verificam-se desde que as funções $a_{ij}(x)$, $1 \leq i, j \leq n$, e $b(x)$ sejam contínuas em I , que será o caso considerado nos resultados seguintes.

O Princípio da Sobreposição, (3.5.1), permanece válido para o sistema (4.2.1). Em particular se $u(x)$ e $v(x)$ são soluções do sistema homogêneo

$$u' = A(x)u, \quad (4.2.3)$$

então $k_1u(x) + k_2v(x)$ é também uma solução, pelo que as soluções de (4.2.3) formam um **espaço vectorial**. Por outro lado, se $u(x)$ é solução de (4.2.1) então $v(x)$ é também solução de (4.2.1) se, e só se, $u(x) - v(x)$ é solução de (4.2.3). Ou seja, a solução geral de (4.2.1) obtém-se adicionando a uma solução particular de (4.2.1) a solução geral do sistema homogêneo correspondente, (4.2.3).

Como determinar a dimensão do espaço vectorial das soluções de (4.2.3)?

Para um determinado conjunto de funções, $u^1(x), \dots, u^n(x)$, o determinante $W(u^1, \dots, u^n)(x)$, ou apenas $W(x)$, é definido por

$$\begin{vmatrix} u_1^1(x) & \dots & u_1^n(x) \\ u_2^1(x) & \dots & u_2^n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ u_n^1(x) & \dots & u_n^n(x) \end{vmatrix}$$

e designa-se por **Wronskiano** das funções $u^1(x), \dots, u^n(x)$.

Este determinante fornece informação sobre a dependência linear das funções envolvidas:

Teorema 4.2.1 *Se o Wronskiano das funções $u^1(x), \dots, u^n(x)$ é não nulo em pelo menos um ponto de I , então as funções são linearmente independentes em I .*

Dem. Sejam $u^1(x), \dots, u^n(x)$ funções linearmente dependentes em I . Então existem n constantes c_1, \dots, c_n , não simultaneamente nulas, tais que $\sum_{i=1}^n c_i u^i(x) = 0$ em I . Este facto é equivalente a afirmar que um sistema

homogêneo formado pelas condições $\sum_{i=1}^n c_i u_k^i(x) = 0, 1 \leq k \leq n, x \in I$,

tem uma solução não trivial. Como é conhecido da Álgebra Linear, um sistema homogêneo, para cada $x \in I$, tem uma solução não trivial se, e só se, $W(x) = 0$. Por hipótese, $W(x) \neq 0$ em pelo menos um $x \in I$, então $u^1(x), \dots, u^n(x)$ não podem ser linearmente dependentes em I . ■

Em geral o recíproco do teorema anterior não é válido. Por exemplo, as funções

$$u^1(x) = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u^2(x) = \begin{bmatrix} x^2 \\ x \end{bmatrix}$$

são linearmente independentes em qualquer intervalo I e $W(u^1, u^2)(x) = 0$ em I .

Contudo a implicação recíproca do Teorema 4.2.1 já é válida se $u^1(x), \dots, u^n(x)$ forem soluções do sistema homogêneo (4.2.3):

Teorema 4.2.2 *Se $u^1(x), \dots, u^n(x)$ são soluções linearmente independentes de (4.2.3) em I então $W(x) \neq 0$ para $x \in I$.*

Dem. Seja x_0 um ponto de I onde $W(x_0) = 0$. Então existem constantes c_1, \dots, c_n , não simultaneamente nulas, tais que $\sum_{i=1}^n c_i u^i(x_0) = 0$.

Como $u(x) = \sum_{i=1}^n c_i u^i(x)$ é solução de (4.2.3) e $u(x_0) = 0$, pela unicidade

de solução tem-se $u(x) = \sum_{i=1}^n c_i u^i(x) = 0$ em I . Contudo, como as funções $u^1(x), \dots, u^n(x)$ são linearmente independentes em I , tem-se $c_1 = \dots = c_n = 0$, cuja contradição completa a demonstração. ■

Combinando os Teoremas 4.2.1 e 4.2.2 resulta que as soluções $u^1(x), \dots, u^n(x)$ do sistema (4.2.3) são linearmente independentes em I se, e só se, existir $x_0 \in I$ tal que $W(x_0) \neq 0$. Portanto as soluções $u^1(x), \dots, u^n(x)$ de (4.2.3) que verifiquem as condições iniciais

$$u^i(x_0) = e^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.2.4)$$

com e^i o i -ésimo vector da base canónica, são linearmente independentes em I . Logo existem n vectores linearmente independentes soluções de (4.2.3) em I .

Considere-se agora uma solução $u(x)$ de (4.2.3) em I tal que $u(x_0) = u^0$. Pela existência e unicidade de solução para o problema (4.2.3), (4.2.2) tem-se

$$u(x) = \sum_{i=1}^n u_i^0 u^i(x), \quad (4.2.5)$$

com $u^i(x)$ a solução do problema (4.2.3), (4.2.4). Isto é, **o espaço vectorial de todas as soluções de (4.2.3) tem dimensão n .**

O próximo teorema estabelece uma relação curiosa entre o Wronskiano e a matriz A : ou $W(x)$ é identicamente nulo em I ou então nunca se anula em I .

Teorema 4.2.3 (Fórmula de Abel) *Sejam $u^1(x), \dots, u^n(x)$ soluções do sistema (4.2.3) em I , que contem x_0 . Então*

$$W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^x \text{Tr} A(t) dt}. \quad (4.2.6)$$

Dem. A derivada do Wronskiano $W(x)$ pode ser escrita como

$$W'(x) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} u_1^1(x) & \dots & u_1^n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ u_{i-1}^1(x) & \dots & u_{i-1}^n(x) \\ (u_i^1)'(x) & \dots & (u_i^n)'(x) \\ u_{i+1}^1(x) & \dots & u_{i+1}^n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ u_n^1(x) & \dots & u_n^n(x) \end{vmatrix}. \quad (4.2.7)$$

Pelo sistema (4.2.3), pode-se substituir, neste determinante, $(u_i^j)'(x)$ por $\sum_{k=1}^n a_{ik}(x)u_k^j(x)$, e efectuar operações de condensação de modo a obter

$$W'(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(x)W(x) = (\text{Tr} A(x)) W(x). \quad (4.2.8)$$

Integrando a equação diferencial de primeira ordem (4.2.8) de x_0 a x tem-se a relação (4.2.6). ■

Exemplo 4.2.4 *Considere-se o sistema*

$$u' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{x^2+2x-1} & \frac{2x+2}{x^2+2x-1} \end{bmatrix} u, \quad x \neq -1 \pm \sqrt{2}.$$

As funções

$$u^1(x) = \begin{bmatrix} x+1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad u^2(x) = \begin{bmatrix} x^2+1 \\ 2x \end{bmatrix}$$

são duas soluções linearmente independentes,

$$W(u^1, u^2)(x) = \begin{vmatrix} x+1 & x^2+1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2 + 2x - 1$$

e

$$e^{\int_{x_0}^x \text{Tr} A(t) dt} = e^{\int_{x_0}^x \frac{2t+2}{t^2+2t-1} dt} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x_0^2 + 2x_0 - 1}.$$

A solução (4.2.5) pode ser escrita na forma matricial como

$$u(x) = \Phi(x, x_0)u^0,$$

com $\Phi(x, x_0)$ uma matriz $n \times n$, cuja i -ésima coluna é $u^i(x)$, denominada por **matriz fundamental principal**. Esta matriz é assim **solução do problema matricial de valor inicial**

$$\Phi' = A(x)\Phi, \quad \Phi(x_0) = I_n. \quad (4.2.9)$$

O processo utilizado para o problema (4.2.1), (4.2.2) pode ser aplicado para provar que o problema (4.2.9) tem uma única solução $\Phi(x, x_0)$ no intervalo I . Por outro lado, passando à forma integral obtem-se que as iterações

$$\begin{aligned} \Phi^{m+1}(x) &= I_n + \int_{x_0}^x A(t)\Phi^m(t)dt, \quad m = 0, 1, \dots \\ \Phi^0(x) &= I_n \end{aligned}$$

convergem para $\Phi(x, x_0)$ e

$$\Phi(x, x_0) = I_n + \int_{x_0}^x A(t)dt + \int_{x_0}^x \int_{x_0}^t A(t)A(t_1)dt_1dt + \dots$$

Se a matriz A , $n \times n$, for **constante** então a expressão anterior assume a forma

$$\begin{aligned} \Phi(x, x_0) &= I_n + A \int_{x_0}^x dt + A^2 \int_{x_0}^x \int_{x_0}^t dt_1dt + \dots \\ &= I_n + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{[A(x-x_0)]^m}{m!} = e^{A(x-x_0)}. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Justifica-se assim o teorema:

Teorema 4.2.5 *A matriz*

$$\Phi(x, x_0) = e^{A(x-x_0)} \quad (4.2.11)$$

é a matriz fundamental do sistema

$$u' = Au, \quad (4.2.12)$$

com A uma matriz constante.

Exemplo 4.2.6 Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ tem-se $A^{4m+1} = A$, $A^{4m+2} = -I$, $A^{4m+3} = -A$, $A^{4m+4} = I$, para $m = 0, 1, \dots$, pelo que a série (4.2.10) permite obter

$$\begin{bmatrix} \cos(x - x_0) & \operatorname{sen}(x - x_0) \\ -\operatorname{sen}(x - x_0) & \cos(x - x_0) \end{bmatrix}.$$

Se as n soluções, $u^1(x), \dots, u^n(x)$, do sistema (4.2.3), são linearmente independentes então formam um **sistema fundamental de soluções** de (4.2.3) e a matriz, de ordem n , $\Psi(x) = [u^1(x), \dots, u^n(x)]$ designa-se por **matriz fundamental** de (4.2.3). Para esta matriz tem-se o seguinte resultado:

Teorema 4.2.7 Se $\Psi(x)$ é a matriz fundamental do sistema (4.2.3) então para qualquer matriz constante, de ordem n e não singular, C , a matriz $\Psi(x)C$ é também uma matriz fundamental de (4.2.3). Além disso, toda a matriz fundamental de (4.2.3) é da forma $\Psi(x)C$, com C uma matriz de ordem n e não singular.

Dem. Por definição, tem-se $\Psi'(x) = A(x)\Psi(x)$ pelo que $\Psi'(x)C = A(x)\Psi(x)C$, ou seja $(\Psi(x)C)' = A(x)(\Psi(x)C)$. Assim, verifica-se que $\Psi(x)$ e $\Psi(x)C$ são ambas soluções do mesmo sistema diferencial matricial $\Phi' = A(x)\Phi$. Como $\det \Psi(x) \neq 0$ e $\det C \neq 0$ então $\det(\Psi(x)C) \neq 0$ e $\Psi(x)C$ é também uma matriz fundamental solução de (4.2.3).

Reciprocamente, sejam $\Psi_1(x)$ e $\Psi_2(x)$ duas matrizes fundamentais soluções de (4.2.3). Se $\Psi_2^{-1}(x)\Psi_1(x) = C(x)$, isto é, $\Psi_1(x) = \Psi_2(x)C(x)$, então $\Psi_1'(x) = \Psi_2'(x)C(x) + \Psi_2(x)C'(x)$, o que é análogo a

$$A(x)\Psi_1(x) = A(x)\Psi_2(x)C(x) + \Psi_2(x)C'(x) = A(x)\Psi_1(x) + \Psi_2(x)C'(x).$$

Portanto, $\Psi_2(x)C'(x) = 0$ ou $C'(x) = 0$, caso em que $C(x)$ será uma matriz constante.

Como $\Psi_1(x)$ e $\Psi_2(x)$ são não singulares, a matriz constante C também é não singular. ■

Como consequência tem-se a relação

$$\Phi(x, x_0) = \Psi(x)\Psi^{-1}(x_0), \quad (4.2.13)$$

pelo que a solução do problema de valor inicial (4.2.3), (4.2.2) se pode escrever como

$$u(x) = \Psi(x)\Psi^{-1}(x_0)u^0.$$

Note-se que dois sistemas homogêneos diferentes não podem ter a mesma matriz fundamental, isto é, $\Psi(x)$ **determina univocamente a matriz**

$A(x)$ em (4.2.3), através da igualdade $A(x) = \Psi'(x)\Psi^{-1}(x)$. Contudo, pelo Teorema 4.2.7, o recíproco é falso.

Derivando a igualdade $\Psi(x)\Psi^{-1}(x) = I$, obtém-se

$$\Psi'(x)\Psi^{-1}(x) + \Psi(x) (\Psi^{-1}(x))' = 0$$

e

$$(\Psi^{-1}(x))' = -\Psi^{-1}(x)A(x).$$

Por transposição

$$\left((\Psi^{-1}(x))^T \right)' = -A^T(x) (\Psi^{-1}(x))^T,$$

pelo que $(\Psi^{-1}(x))^T$ é uma matriz fundamental do sistema

$$u' = -A^T(x)u. \quad (4.2.14)$$

Ao sistema (4.2.14) chama-se **sistema adjunto** de (4.2.3).

Exercício 4.2.8 *Seja $\Phi(x, x_0)$ a matriz fundamental do sistema homogêneo (4.2.3) num intervalo J . Mostre que:*

- a)* $\Phi(x, x_0) = \Phi(x, x_1)\Phi(x_1, x_0)$, para $x_1 \in J$;
- b)* $\Phi^{-1}(x, x_0) = \Phi(x_0, x)$, $\forall x \in J$;
- c)* $\Phi(x, x) = I$, $\forall x \in J$.

O método da variação dos parâmetros também pode ser aplicado para encontrar soluções de sistemas não homogêneos (4.2.1).

Nesse sentido procura-se uma função vectorial $v(x)$ tal que $\Phi(x, x_0)v(x)$ seja solução do sistema (4.2.1). Derivando tem-se

$$\Phi'(x, x_0)v(x) + \Phi(x, x_0)v'(x) = A(x)\Phi(x, x_0)v(x) + b(x)$$

e

$$\Phi(x, x_0)v'(x) = b(x).$$

Pelo Exercício 4.2.8, obtém-se

$$v'(x) = \Phi^{-1}(x, x_0)b(x) = \Phi(x_0, x)b(x),$$

pelo que $v(x)$ pode ser obtida por

$$v(x) = v(x_0) + \int_{x_0}^x \Phi(x_0, t)b(t)dt.$$

Como $u(x_0) = \Phi(x_0, x_0)v(x_0) = v(x_0)$, a solução do problema de valor inicial (4.2.1) será da forma

$$u(x) = \Phi(x, x_0)u^0 + \Phi(x, x_0) \int_{x_0}^x \Phi(x_0, t)b(t)dt$$

e, pelo Exercício 4.2.8,

$$u(x) = \Phi(x, x_0)u^0 + \int_{x_0}^x \Phi(x, t)b(t)dt. \quad (4.2.15)$$

Escrevendo a solução de (4.2.1) em termos da matriz fundamental tem-se, por (4.2.13),

$$u(x) = \Psi(x)c + \int_{x_0}^x \Psi(x)\Psi^{-1}(t)b(t)dt, \quad (4.2.16)$$

com $c = \Psi^{-1}(x_0)u^0$.

No caso em que $A(x)$ é uma matriz constante substitui-se (4.2.11) em (4.2.15) e obtém-se

$$u(x) = e^{A(x-x_0)}u^0 + \int_{x_0}^x e^{A(x-t)}b(t)dt. \quad (4.2.17)$$

Exemplo 4.2.9 *Considere-se o sistema*

$$u' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.2.18)$$

Para o correspondente sistema homogêneo verifica-se que a a matriz fundamental principal é

$$\Phi(x, 0) = \begin{bmatrix} 2e^x - e^{2x} & -e^x + e^{2x} \\ 2e^x - 2e^{2x} & -e^x + 2e^{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então a solução de (4.2.18) que verifique a condição $u(0) = u^0$ é dada por

$$\begin{aligned} u(x) &= \begin{bmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u^0 \\ &\quad + \begin{bmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{bmatrix} \int_0^x \begin{bmatrix} 2e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u^0 + (e^x - 1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4.3 Sistemas com coeficientes constantes

A técnica utilizada anteriormente para obter, de modo explícito, soluções de sistemas homogêneos e/ou completos tem uma utilidade muito restrita pelo facto de envolver cálculos, por vezes, pouco "práticos". Este processo pode ser facilitado com o recurso aos valores e vectores próprios da matriz A , no caso em que esta é constante.

Teorema 4.3.1 *Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valores próprios da matriz A e v^1, \dots, v^n os correspondentes vectores próprios. Então*

$$u^1(x) = v^1 e^{\lambda_1 x}, \dots, u^n(x) = v^n e^{\lambda_n x} \quad (4.3.1)$$

é um conjunto fundamental de soluções de (4.2.12).

Dem. Como v^i é um vector próprio de A associado ao valor próprio λ_i , tem-se

$$(u^i(x))' = (v^i e^{\lambda_i x})' = \lambda_i v^i e^{\lambda_i x} = A v^i e^{\lambda_i x} = A u^i(x),$$

pelo que $u^i(x)$ é solução de (4.2.12). Para provar que (4.3.1) é um conjunto fundamental de soluções, salienta-se que $W(0) = \det [v^1, \dots, v^n] \neq 0$, pois v^1, \dots, v^n são linearmente independentes. Então o resultado pretendido resulta do Teorema 4.2.1. ■

Pelo teorema anterior tem-se

$$e^{Ax} = [v^1 e^{\lambda_1 x}, \dots, v^n e^{\lambda_n x}] [v^1, \dots, v^n]^{-1},$$

pelo que a solução geral de (4.2.12) terá a forma $u(x) = \sum_{i=1}^n c_i v^i e^{\lambda_i x}$.

Exemplo 4.3.2 *A solução geral do sistema*

$$u' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} u$$

é

$$u(x) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^x + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4x}$$

com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Quando a matriz A tem apenas $k < n$ valores próprios distintos então o cálculo de e^{Ax} não é fácil. Um método possível é dado pelos próximos resultados.

Teorema 4.3.3 (Cayley-Hamilton) *Se A é uma matriz $n \times n$ com $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ então $p(A) = 0$.*

Teorema 4.3.4 (Algoritmo de Putzer) *Considerem-se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, valores próprios (não necessariamente distintos) da matriz A . Então*

$$e^{Ax} = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(x) P_j \quad (4.3.2)$$

com $P_0 = I$, $P_j = \prod_{k=1}^j (A - \lambda_k I)$, $j = 1, \dots, n-1$, e $r_1(x), \dots, r_n(x)$ são dados, por recorrência, pelas equações diferenciais

$$\begin{aligned} r'_1(x) &= \lambda_1 r_1(x), & r_1(0) &= 1 \\ r'_j(x) &= \lambda_j r_j(x) + r_{j-1}(x), & r_j(0) &= 0, \quad j = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

(Note-se que cada valor próprio na lista $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ está repetido de acordo com a sua multiplicidade.)

Dem. Bastará provar que $\Phi(x)$ dada por $\Phi(x) = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(x) P_j$ verifica $\Phi' = A\Phi$, $\Phi(0) = I$. Para tal, define-se $r_0(x) \equiv 0$ e obtem-se

$$\begin{aligned} \Phi'(x) - \lambda_n \Phi(x) &= \sum_{j=0}^{n-1} [\lambda_{j+1} r_{j+1}(x) + r_j(x)] P_j - \lambda_n \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(x) P_j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_n) r_{j+1}(x) P_j + \sum_{j=0}^{n-1} r_j(x) P_j \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} (\lambda_{j+1} - \lambda_n) r_{j+1}(x) P_j + \sum_{j=0}^{n-2} r_{j+1}(x) P_{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} [(\lambda_{j+1} - \lambda_n) P_j + (A - \lambda_{j+1} I) P_j] r_{j+1}(x) \quad (4.3.3) \\ &= (A - \lambda_n I) \sum_{j=0}^{n-2} r_{j+1}(x) P_j \\ &= (A - \lambda_n I) (\Phi(x) - r_n(x) P_{n-1}) \\ &= (A - \lambda_n I) \Phi(x) - r_n(x) P_n, \quad (4.3.4) \end{aligned}$$

em que para obter (4.3.3) e (4.3.4) se utilizou $P_{j+1} = (A - \lambda_{j+1}I)P_j$ e $P_n = (A - \lambda_nI)P_{n-1}$, respectivamente. Pelo Teorema 4.3.3, $P_n = p(A) = 0$ e (4.3.4) reduz-se a $\Phi'(x) = A\Phi(x)$.

Finalmente, tem-se

$$\Phi(0) = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(0)P_j = r_1(0) = I.$$

■

Exemplo 4.3.5 *Suponha-se uma matriz A de ordem 3 que admite um valor próprio λ_1 , de multiplicidade três. No Teorema anterior tem-se $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1$ e $r_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $r_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$, $r_3(x) = \frac{x^2}{2}e^{\lambda_1 x}$ são as soluções do sistema*

$$\begin{aligned} r_1' &= \lambda_1 r_1, & r_1(0) &= 1, \\ r_2' &= \lambda_1 r_2 + r_1, & r_2(0) &= 0, \\ r_3' &= \lambda_1 r_3 + r_2, & r_3(0) &= 0. \end{aligned}$$

Assim tem-se

$$e^{Ax} = e^{\lambda_1 x} \left[I + x(A - \lambda_1 I) + \frac{x^2}{2}(A - \lambda_1 I)^2 \right].$$

No caso particular da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{bmatrix},$$

em que todos os valores próprios são iguais a -1 tem-se

$$e^{Ax} = \frac{1}{2}e^{-x} \begin{bmatrix} 2 + 6x - 3x^2 & 2x & -2x + x^2 \\ -6x & 2 & 2x \\ 18x - 9x^2 & 6x & 2 - 6x + 3x^2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4.3.6 *Seja A uma matriz de ordem 3 com dois valores próprios sendo um de multiplicidade dois: $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2$. Como $r_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $r_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$ e*

$$r_3(x) = \frac{xe^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x}}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}$$

obtem-se

$$e^{Ax} = e^{\lambda_1 x} \left[I + x(A - \lambda_1 I) + \left(\frac{x}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} - 1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \right) (A - \lambda_1 I)^2 \right].$$

Para

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

com os valores próprios $-1, -1, 1$, tem-se

$$e^{Ax} = \begin{bmatrix} e^{-x} & 0 & 2(e^x - e^{-x}) \\ 0 & e^{-x} & e^x - e^{-x} \\ 0 & 0 & e^x \end{bmatrix}.$$

Exercício 4.3.7 Mostre que para cada matriz A se obtém a matriz exponencial indicada:

(a) Se $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ então $e^{Ax} = e^{\alpha x} \begin{bmatrix} \cos \beta x & \operatorname{sen} \beta x \\ -\operatorname{sen} \beta x & \cos \beta x \end{bmatrix}$.

(b) Para $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\delta \end{bmatrix}$, com $|\delta| < 1$, tem-se

$$e^{Ax} = \begin{bmatrix} e^{-\delta x} \left(\cos \omega x + \frac{\delta}{\omega} \operatorname{sen} \omega x \right) & \frac{1}{\omega} e^{-\delta x} \operatorname{sen} \omega x \\ -\frac{1}{\omega} e^{-\delta x} \operatorname{sen} \omega x & e^{-\delta x} \left(\cos \omega x - \frac{\delta}{\omega} \operatorname{sen} \omega x \right) \end{bmatrix},$$

sendo $\omega = \sqrt{1 - \delta^2}$.

Exercício 4.3.8 Seja $u(x)$ uma solução do sistema diferencial (4.2.12). Justifique que a parte real e a parte imaginária de $u(x)$ são soluções de (4.2.12).

Exercício 4.3.9 Prove que

(i) Toda a solução de (4.2.12) tende para zero quando $x \rightarrow +\infty$ se e só se as partes reais dos valores próprios de A são negativas.

(ii) Toda a solução de (4.2.12) é limitada em $[0, +\infty[$ se e só se as partes reais dos valores próprios de A com multiplicidade superior a 1 são negativas e as partes reais dos valores próprios simples de A são não positivas.

4.4 Sistemas periódicos lineares

A periodicidade das soluções de um sistema de equações diferenciais é um aspecto interessante e importante para o seu estudo qualitativo. Designando por $\omega > 0$ o período positivo mínimo, se cada componente $u_i(x)$,

$1 \leq i \leq n$, de $u(x)$ e cada elemento $a_{ij}(x)$, $1 \leq i, j \leq n$, de $A(x)$, são funções periódicas de período ω , então $u(x)$ e $A(x)$ dizem-se **periódicas** de período ω .

O próximo resultado fornece uma condição necessária e suficiente para que o sistema diferencial (4.2.1) tenha soluções periódicas de período ω :

Teorema 4.4.1 *Considere-se a matriz $A(x)$ e a função $b(x)$ contínuas e periódicas, de período ω , em \mathbb{R} . Então o sistema (4.2.1) tem uma solução periódica $u(x)$ de período ω se e só se $u(0) = u(\omega)$.*

Dem. Seja $u(x)$ uma solução periódica de período ω . Então é necessário que $u(0) = u(\omega)$.

Para a condição suficiente, considere-se $u(x)$ uma solução de (4.2.1) tal que $u(0) = u(\omega)$. Se $v(x) = u(x + \omega)$, então

$$v'(x) = u'(x + \omega) = A(x + \omega)u(x + \omega) + b(x + \omega),$$

isto é, $v(x)$ é solução de (4.2.1). Como $v(0) = u(\omega) = u(0)$, a unicidade do problema de valor inicial implica que $u(x) = v(x) = u(x + \omega)$ e, portanto, $u(x)$ é periódica de período ω . ■

Corolário 4.4.2 *Se $A(x)$ é uma matriz contínua e periódica em \mathbb{R} , de período ω , e $\Psi(x)$ é uma matriz fundamental do sistema homogêneo (4.2.3) então o sistema (4.2.3) tem uma solução periódica não trivial $u(x)$ de período ω se e só se $\det(\Psi(0) - \Psi(\omega)) = 0$.*

Dem. A solução geral do sistema diferencial (4.2.3) é, como já foi referido anteriormente, $u(x) = \Psi(x)C$, com C um vector constante arbitrário. Esta solução $u(x)$ é periódica de período ω se e só se $\Psi(0)C = \Psi(\omega)C$, isto é, o sistema $[\Psi(0) - \Psi(\omega)]C = 0$ tem uma solução não trivial C . Contudo este sistema tem uma solução não trivial se e só se $\det[\Psi(0) - \Psi(\omega)] = 0$. ■

Corolário 4.4.3 *O sistema diferencial (4.2.12) tem uma solução periódica não trivial $u(x)$ de período ω se, e só se, a matriz $(I - e^{A\omega})$ é singular.*

Corolário 4.4.4 *Nas hipóteses do Teorema 4.4.1, o sistema (4.2.1) tem uma única solução periódica de período ω se, e só se, o sistema homogêneo (4.2.3) admite unicamente, como solução periódica de período ω , a solução trivial.*

Dem. Considere-se $\Psi(x)$, uma matriz fundamental do sistema (4.2.3). Então por (4.2.16), a solução geral de (4.2.1) pode escrever-se na forma

$$u(x) = \Psi(x)C + \int_0^x \Psi(x)\Psi^{-1}(t)b(t)dt,$$

com C uma constante arbitrária. Esta função $u(x)$ é periódica de período ω se e só se

$$\Psi(0)C = \Psi(\omega)C + \int_0^\omega \Psi(\omega)\Psi^{-1}(t)b(t)dt,$$

ou seja, o sistema

$$[\Psi(0) - \Psi(\omega)]C = \int_0^\omega \Psi(\omega)\Psi^{-1}(t)b(t)dt$$

tem uma única solução vectorial C . Mas este sistema tem uma única solução se, e só se, $\det[\Psi(0) - \Psi(\omega)] \neq 0$, pelo que a conclusão pretendida resulta do Corolário 4.4.2. ■

Quando as condições do Corolário 4.4.2 se verificam, a matriz fundamental $\Psi(x)$ pode ser escrita como um produto entre uma matriz periódica de período ω e uma matriz fundamental dum sistema diferencial com coeficientes constantes. Para tal utiliza-se a matriz logaritmo:

Teorema 4.4.5 *Seja A uma matriz quadrada não singular de ordem n . Então existe uma matriz B , matriz quadrada de ordem n , (designada por **logaritmo de A**) tal que $A = e^B$.*

Teorema 4.4.6 (de Floquet) *Nas condições do Corolário 4.4.2 são válidas as proposições:*

(i) *A matriz $\chi(x) := \Psi(x+\omega)$ é também uma matriz fundamental do sistema homogéneo (4.2.3);*

(ii) *Existe uma matriz periódica singular $P(x)$, de período ω , e uma matriz constante R tais que*

$$\Psi(x) = P(x) e^{Rx}.$$

Dem. Como $\Psi(x)$ é uma matriz fundamental do sistema diferencial homogéneo (4.2.3), tem-se

$$\chi'(x) = \Psi'(x+\omega) = A(x+\omega)\Psi(x+\omega) = A(x)\chi(x),$$

isto é, $\chi(x)$ é uma matriz solução do sistema homogéneo (4.2.3). Por outro lado, como $\det(\Psi(x+\omega)) \neq 0$ para todo o x , tem-se $\det(\chi(x)) \neq 0$ para

qualquer x . Portanto, conclui-se que $\chi(x)$ é uma matriz fundamental do sistema (4.2.3), o que completa a demonstração da parte (i).

Para provar a parte (ii), como $\Psi(x)$ e $\Psi(x + \omega)$ são ambas matrizes fundamentais do sistema (4.2.3), pelo Teorema 4.2.7, existe uma matriz constante e não singular C tal que

$$\Psi(x + \omega) = \Psi(x)C. \quad (4.4.1)$$

Pelo Teorema 4.4.5 existe uma matriz constante R tal que $C = e^{R\omega}$ e, por (4.4.1), obtém-se

$$\Psi(x + \omega) = \Psi(x)e^{R\omega}. \quad (4.4.2)$$

Defina-se agora a matriz $P(x)$ por

$$P(x) = \Psi(x)e^{-Rx}. \quad (4.4.3)$$

Por (4.4.2), tem-se

$$P(x + \omega) = \Psi(x + \omega)e^{-R(x+\omega)} = \Psi(x)e^{R\omega}e^{-R(x+\omega)} = \Psi(x)e^{-Rx} = P(x).$$

Portanto, $P(x)$ é periódica com período ω , e como $\Psi(x)$ e e^{-Rx} são matrizes não singulares então $\det P(x) \neq 0$ em \mathbb{R} . ■

4.5 Comportamento assintótico das soluções de sistemas lineares

Nesta secção apresentam-se algumas condições a exigir aos dados conhecidos num sistema, de modo a que seja possível garantir que todas as suas soluções permaneçam limitadas ou tendam para zero quando $x \rightarrow \infty$. Esta propriedade torna-se particularmente útil já que será feita sem necessitar da forma explícita da solução.

O Exercício 4.3.9 já fornece condições necessárias e suficientes para que todas as soluções de (4.2.12), $u' = Au$, sejam limitadas ou tendam para zero.

Por outro lado, se, no Teorema 4.3.4, se designar cada $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\alpha := \max_{1 \leq j \leq n} \alpha_j$ e $r := \max_{1 \leq j \leq n} r_j$ então existe $x_1 \geq x_0 \geq 0$ tal que para $x \geq x_1$ a relação (4.3.2) garante que

$$\|e^{Ax}\| \leq c e^{\alpha x} x^r,$$

com c uma determinada constante. Considerando $\alpha < \eta$ então existe $x_2 \geq x_1$ tal que para $x \geq x_2$ se verifica $e^{\alpha x} x^r \leq e^{\eta x}$. Logo, para $x \geq x_2$, obtém-se

$$\|e^{Ax}\| \leq c e^{\eta x}. \quad (4.5.1)$$

Como o intervalo $[0, x_2]$ é finito, pode-se considerar em (4.5.1) c suficientemente grande de modo a que a desigualdade se verifique para qualquer $x \geq 0$. Assim qualquer solução $u(x)$ de (4.2.12) satisfaz a desigualdade

$$\|u(x)\| \leq c_1 e^{\eta x},$$

para uma certa constante c_1 .

Considere-se o sistema (4.2.12) perturbado na forma

$$v' = (A + B(x))v, \quad (4.5.2)$$

com $B(x)$ uma matriz de ordem n com os elementos $b_{ij}(x)$ contínuos, $1 \leq i, j \leq n$, em $[0, +\infty[$.

O próximo lema descreve um processo de obter majorações:

Lema 4.5.1 (de Gronwall) *Seja $s : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva, verificando, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$ não simultaneamente nulos*

$$g(t) \leq \beta + \alpha \int_a^t g(s) ds, \quad \forall t \in [a, b[.$$

Então

$$g(t) \leq \beta e^{\alpha(t-a)}, \quad \forall t \in [a, b[.$$

Dem. Pela hipótese obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{g(t)}{\beta + \alpha \int_a^t g(s) ds} &\leq 1, \\ \frac{\alpha g(t)}{\beta + \alpha \int_a^t g(s) ds} &\leq \alpha \end{aligned}$$

e

$$\frac{d}{dt} \left[\ln \left(\beta + \alpha \int_a^t g(s) ds \right) \right] \leq \alpha.$$

Integrando em $[a, t]$ obtem-se

$$\begin{aligned} \int_a^t \frac{d}{du} \left[\ln \left(\beta + \alpha \int_a^u g(s) ds \right) \right] du &\leq \alpha(t-a), \\ \ln \left(\beta + \alpha \int_a^t g(s) ds \right) - \ln \beta &\leq \alpha(t-a) \end{aligned}$$

e

$$\beta + \alpha \int_a^t g(s) ds \leq \beta e^{\alpha(t-a)}.$$

Utilizando novamente a hipótese

$$g(t) \leq \beta + \alpha \int_a^t g(s) ds \leq \beta e^{\alpha(t-a)}, \quad \forall t \in [a, b].$$

■

O primeiro resultado fornece uma condição suficiente para $B(x)$ de modo a que todas as soluções de (4.5.2) permaneçam limitadas desde que as soluções de (4.2.12) sejam limitadas:

Teorema 4.5.2 *Se todas as soluções de (4.2.12) são limitadas em $[0, +\infty[$ e*

$$\int_0^{+\infty} \|B(t)\| dt < +\infty \quad (4.5.3)$$

então todas as soluções de (4.5.2) são limitadas em $[x_0, +\infty[$.

Dem. Na expressão (4.2.17), considere-se o termo não homogêneo $b(x)$ na forma $B(x)v$, de modo a que cada solução $v(x)$, com $v(x_0) = v^0$, do sistema diferencial (4.5.2) verifique a equação integral

$$v(x) = e^{A(x-x_0)} v^0 + \int_{x_0}^x e^{A(t-x_0)} B(t) v(t) dt. \quad (4.5.4)$$

Como todas as soluções de (4.2.12) são limitadas, existe uma constante c tal que $\sup_{x \geq 0} \|e^{Ax}\| = c$. Assim, para $x \geq 0$, tem-se

$$\|v(x)\| \leq c \|v^0\| + c \int_{x_0}^x \|B(t)\| \|v(t)\| dt. \quad (4.5.5)$$

Aplicando o Lema 4.5.1 à desigualdade (4.5.5) tem-se

$$\|v(x)\| \leq c \|v^0\| e^{c \int_{x_0}^x \|B(t)\| dt},$$

para $x \geq 0$. Pelo que o resultado pretendido é consequência de (4.5.3). ■

A condição (4.5.3) exige uma "limitação uniforme" sobre $B(x)$ que pode ser ultrapassada do seguinte modo:

Teorema 4.5.3 *Se todas as soluções de (4.2.12) tendem para 0 quando $x \rightarrow +\infty$ e*

$$\|B(x)\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } x \rightarrow +\infty, \quad (4.5.6)$$

então todas as soluções de (4.5.2) tendem para 0 quando $x \rightarrow +\infty$.

Dem. Como todas as soluções de (4.2.12) tendem para 0 quando $x \rightarrow +\infty$, o Exercício 4.3.9 garante que todos os valores próprios de A têm a parte real negativa. Assim, existem constantes c e $\eta = -\delta$ ($\delta > 0$) tais que (4.5.1) é verificada, isto é, $\|e^{Ax}\| \leq c e^{-\delta x}$, para todo $x \geq 0$.

Por (4.5.6), dada uma constante $c_1 > 0$, existe $x_1 \geq x_0$ suficientemente grande tal que $\|B(x)\| \leq c_1$ para $x \geq x_1$. Pela equação (4.5.4), para $x \geq x_1$, tem-se

$$\begin{aligned} \|v(x)\| &\leq c e^{-\delta(x-x_0)} \|v^0\| + \int_{x_0}^{x_1} c e^{-\delta(x-t)} \|B(t)\| \|v(t)\| dt \\ &\quad + \int_{x_1}^x c e^{-\delta(x-t)} c_1 \|v(t)\| dt, \end{aligned}$$

o que é o mesmo que

$$w(x) \leq c_0 + c_2 \int_{x_1}^x w(t) dt, \quad (4.5.7)$$

com $w(x) = \|v(x)\| e^{\delta x}$,

$$c_0 = c e^{\delta x_0} \|v^0\| + c \int_{x_0}^{x_1} e^{\delta t} \|B(t)\| \|v(t)\| dt$$

e $c_2 = c c_1$.

Aplicando agora o Lema 4.5.1 à desigualdade (4.5.7) obtem-se

$$w(x) \leq c_0 e^{c_2(x-x_1)},$$

pelo que

$$\|v(x)\| \leq c_0 e^{(c_2-\delta)x - c_2 x_1}. \quad (4.5.8)$$

Finalmente, por (4.5.6) pode escolher-se c_1 suficientemente pequeno, de modo a que $c_2 = c c_1 < \delta$ e o resultado pretendido resulta de (4.5.8). ■

Embora ambas as condições (4.5.3) e (4.5.6) coloquem restrições à "grandeza" de $B(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$, a primeira é mais forte que a segunda. Contudo, no Teorema 4.5.2, a condição (4.5.3) não pode ser substituída por (4.5.6), como se verifica no exemplo seguinte:

Exemplo 4.5.4 *Considerem-se os sistemas*

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.5.9)$$

e

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2a}{ax+b} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad (4.5.10)$$

com a e b constantes positivas.

Um sistema fundamental de soluções de (4.5.9) é dado por

$$\{(\cos x, -\operatorname{sen} x), (\operatorname{sen} x, \cos x)\},$$

pelo que todas as soluções de (4.5.9) são limitadas. Contudo um sistema fundamental de soluções de (4.5.10) é

$$\begin{bmatrix} a \operatorname{sen} x - (ax+b) \cos x \\ (ax+b) \operatorname{sen} x \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a \cos x + (ax+b) \operatorname{sen} x \\ (ax+b) \cos x \end{bmatrix},$$

pelo que todas as soluções não triviais de (4.5.10) são não limitadas quando $x \rightarrow +\infty$.

Note-se ainda que $\|B(x)\| \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$ e

$$\int_0^x \|B(t)\| dt = \int_0^x \frac{2a}{at+b} dt = \ln \left(\frac{ax+b}{b} \right)^2 \rightarrow +\infty$$

quando $x \rightarrow +\infty$.

Estude-se agora o problema

$$v' = Av + b(x), \quad (4.5.11)$$

com $b(x)$ uma matriz coluna com n componentes contínuos $b_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, no intervalo $[x_0, +\infty[$. Tal como anteriormente, este sistema pode ser considerado como uma perturbação de (4.2.12), sendo o termo perturbante $b(x)$. Por (4.2.17), cada solução $v(x)$ do sistema (4.5.11), com $v(x_0) = v^0$, verifica a equação integral

$$v(x) = e^{A(x-x_0)} v^0 + \int_{x_0}^x e^{A(x-t)} b(t) dt.$$

Então, para qualquer $x \geq x_0$ a desigualdade (4.5.1) permite obter

$$\|v(x)\| \leq c_0 e^{\eta x} + c \int_{x_0}^x e^{\eta(x-t)} \|b(t)\| dt, \quad (4.5.12)$$

com $c_0 = c e^{-\eta x_0} \|v^0\|$, o que conduz ao seguinte resultado:

Teorema 4.5.5 *Considere-se que a função $b(x)$ verifica*

$$\|b(x)\| \leq c_3 e^{\nu x}, \quad (4.5.13)$$

para x suficientemente grande, $c_3 \geq 0$ e ν constantes. Então toda a solução $v(x)$ do sistema (4.5.11) satisfaz

$$\|v(x)\| \leq c_4 e^{\zeta x}, \quad (4.5.14)$$

para $x \geq x_0$, $c_4 \geq 0$ e ζ constantes.

Dem. A hipótese sobre $b(x)$, garante a existência de $x_1 \geq x_0$ tal que (4.5.13) se verifica para $x \geq x_1$. Portanto, por (4.5.12), se $\nu \neq \eta$ tem-se

$$\begin{aligned} \|v(x)\| &\leq e^{\eta x} \left[c_0 + c \int_{x_0}^{x_1} e^{-\eta t} \|b(t)\| dt + cc_3 \int_{x_1}^x e^{(\nu-\eta)t} dt \right] \\ &= e^{\eta x} \left[c_0 + c \int_{x_0}^{x_1} e^{-\eta t} \|b(t)\| dt + \frac{cc_3}{\nu - \eta} \left(e^{(\nu-\eta)x} - e^{(\nu-\eta)x_1} \right) \right] \\ &\leq e^{\eta x} \left[c_0 + c \int_{x_0}^{x_1} e^{-\eta t} \|b(t)\| dt + \frac{cc_3}{|\nu - \eta|} e^{(\nu-\eta)x_1} \right] + \frac{cc_3}{|\nu - \eta|} e^{\nu x} \\ &\leq c_4 e^{\zeta x}, \end{aligned}$$

sendo $\zeta = \max\{\eta, \nu\}$ e

$$c_4 = c_0 + c \int_{x_0}^{x_1} e^{-\eta t} \|b(t)\| dt + \frac{cc_3}{|\nu - \eta|} \left(e^{(\nu-\eta)x_1} + 1 \right).$$

No caso em que $\nu = \eta$ o processo é análogo com as modificações óbvias. ■

Repare-se que no caso em que $\zeta < 0$, por (4.5.14), toda a solução do sistema (4.5.11) tende para zero quando $x \rightarrow +\infty$.

Veja-se agora o comportamento das soluções do sistema (4.2.3) quando $x \rightarrow +\infty$.

Em primeiro lugar consideram-se resultados que envolvem os valores próprios da matriz $(A(x) + A^T(x))$, os quais são funções de x .

Teorema 4.5.6 *Sejam $A(x)$ uma matriz contínua em $[x_0, +\infty[$ e $M(x)$ o maior valor próprio da matriz $(A(x) + A^T(x))$ tal que*

$$\int_0^{+\infty} M(t) dt = -\infty. \quad (4.5.15)$$

Então toda a solução do sistema diferencial (4.2.3) tende para zero quando $x \rightarrow +\infty$.

Dem. Considere-se uma solução $u(x)$ do sistema diferencial (4.2.3). Então $|u(x)|^2 = u^T(x)u(x)$ e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} |u(x)|^2 &= (u^T(x))' u(x) + u^T(x) u'(x) \\ &= u^T(x) A^T(x) u(x) + u^T(x) A(x) u(x) \\ &= u^T(x) [A^T(x) + A(x)] u(x). \end{aligned}$$

Como a matriz $[A^T(x) + A(x)]$ é simétrica e $M(x)$ é o seu o maior valor próprio, então

$$u^T(x) [A^T(x) + A(x)] u(x) \leq M(x) |u(x)|^2.$$

Portanto, para todo $x \geq x_0$ tem-se

$$0 \leq |u(x)|^2 \leq |u(x_0)|^2 + \int_{x_0}^x M(t) |u(t)|^2 dt.$$

Utilizando o Corolário ??, obtem-se

$$|u(x)|^2 \leq |u(x_0)|^2 e^{\int_{x_0}^x M(t) dt} \quad (4.5.16)$$

e a conclusão é imediata, por (4.5.15). ■

Observação 4.5.7 Se no Teorema 4.5.6 a condição (4.5.15) for substituída por

$$\int_0^{+\infty} M(t) dt < +\infty,$$

então a solução $u(x)$ do sistema (4.2.3) permanece limitada quando $x \rightarrow +\infty$.

Teorema 4.5.8 Sejam $A(x)$ uma matriz contínua em $[x_0, +\infty[$ e $m(x)$ o menor valor próprio da matriz $(A(x) + A^T(x))$ tal que

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x m(t) dt = +\infty. \quad (4.5.17)$$

Então toda a solução de (4.2.3) é ilimitada.

Dem. Seguindo o processo da demonstração do Teorema 4.5.6, tem-se, para $x \geq x_0$,

$$|u(x)|^2 \geq |u(x_0)|^2 + \int_{x_0}^x m(t) |u(t)|^2 dt,$$

o que implica

$$|u(x)|^2 \geq |u(x_0)|^2 e^{\int_{x_0}^x m(t) dt},$$

obtendo-se o resultado pretendido por (4.5.17). ■

Exemplo 4.5.9 Para a matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+x)^2} & x^2 \\ -x^2 & -1 \end{bmatrix}$ tem-se

$$A(x) + A^T(x) = \begin{bmatrix} \frac{2}{(1+x)^2} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad M(x) = \frac{2}{(1+x)^2} e^{\int_0^{+\infty} \frac{2}{(1+t)^2} dt} = 2.$$

Então todas as soluções do sistema diferencial $u' = A(x)u$ permanecem limitadas quando $x \rightarrow +\infty$.

Exemplo 4.5.10 Se $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{1+x} & 1+x^2 \\ -1-x^2 & -2 \end{bmatrix}$ tem-se

$$A(x) + A^T(x) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{1+x} & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad M(x) = -\frac{2}{1+x} e^{\int_0^{+\infty} -\frac{2}{1+t} dt} = -\infty.$$

Então todas as soluções do sistema diferencial $u' = A(x)u$ tendem para zero quando $x \rightarrow +\infty$.

Ainda relacionado com (4.2.3) considere-se o sistema perturbado

$$v' = (A(x) + B(x))v, \quad (4.5.18)$$

com $B(x)$ uma matriz de ordem n com elementos contínuos $b_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$ no intervalo $[x_0, +\infty[$.

Um primeiro resultado mostra que **a limitação de todas as soluções de (4.2.3) e (4.5.3) não garante a limitação das soluções do sistema (4.5.18)**, ou seja, quando a matriz A é uma função de x então não se verifica necessariamente a conclusão do Teorema 4.5.2.

Exemplo 4.5.11 Considere-se o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} u_1' &= -a u_1 \\ u_2' &= (\sin(\ln x) + \cos(\ln x) - 2a) u_2, \end{aligned} \quad (4.5.19)$$

com $1 < 2a < 1 + \frac{e^{-\pi}}{2}$, cuja solução geral é dada por

$$\begin{aligned} u_1(x) &= c_1 e^{-ax} \\ u_2(x) &= c_2 e^{(\sin(\ln x) - 2a)x}. \end{aligned}$$

Como $a > \frac{1}{2}$, toda a solução de (4.5.19) tende para zero quando $x \rightarrow +\infty$.
No sistema perturbado

$$\begin{aligned} v_1' &= -a v_1 \\ v_2' &= (\operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x) - 2a) v_2 + e^{-ax} v_1, \end{aligned}$$

tem-se como matriz perturbante $B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e^{-ax} & 0 \end{bmatrix}$, com $\int_0^{+\infty} \|B(t)\| dt < +\infty$, sendo a sua solução geral dada por

$$\begin{aligned} v_1(x) &= c_1 e^{-ax} \\ v_2(x) &= e^{(\operatorname{sen}(\ln x) - 2a)x} \left(c_2 + c_1 \int_0^x e^{-t} \operatorname{sen}(\ln t) dt \right). \end{aligned}$$

Definindo $x = x_n = e^{\frac{2n+1}{2}\pi}$, $n = 1, 2, \dots$, obtem-se

$$\operatorname{sen}(\ln x_n) = 1e - \operatorname{sen}(\ln t) \geq \frac{1}{2}$$

para qualquer t que satisfaça

$$e^{\frac{2n-1}{2}\pi} \leq t \leq e^{\frac{2n+1}{2}\pi},$$

isto é, $x_n e^{-\pi} \leq t \leq x_n e^{-\frac{2\pi}{3}}$. Portanto

$$\begin{aligned} \int_0^{x_n} e^{-t} \operatorname{sen}(\ln t) dt &> \int_{e^{\frac{2n-1}{2}\pi}}^{e^{\frac{2n+1}{2}\pi}} e^{-t} \operatorname{sen}(\ln t) dt \geq \int_{x_n e^{-\pi}}^{x_n e^{-\frac{2\pi}{3}}} e^{\frac{t}{2}} dt \\ &> e^{\frac{1}{2}x_n e^{-\pi}} \left(e^{-\frac{2\pi}{3}} - e^{-\pi} \right) x_n \end{aligned}$$

e, para $c_1 > 0$, obtem-se

$$v_2(x_n) > e^{(1-2a)x_n} \left(c_2 + c_1 x_n \left(e^{-\frac{2\pi}{3}} - e^{-\pi} \right) e^{\frac{1}{2}x_n e^{-\pi}} \right).$$

Para $c_1 < 0$ a desigualdade é inversa. Como $2a < 1 + \frac{e^{-\pi}}{2}$, verifica-se que $v_2(x_n) \rightarrow +\infty$ ($-\infty$) pelo que $v_2(x_n)$ permanece limitada somente para $c_1 = 0$.

Este exemplo revela que, para os sistemas (4.2.3) e (4.5.18), o Teorema 4.5.3 não é válido se se substituir a condição (4.5.6) por (4.5.3). Para obter resultados semelhantes é necessário exigir mais condições a $A(x)$.

Teorema 4.5.12 *Admita-se que todas as soluções do sistema de equações diferenciais (4.2.3) são limitadas em $[x_0, +\infty[$ e que a condição (4.5.3) se verifica. Então todas as soluções de (4.5.18) são limitadas em $[x_0, +\infty[$ desde que*

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x \text{Tr } A(t) dt > -\infty \quad \text{ou} \quad \text{Tr } A(x) = 0. \quad (4.5.20)$$

Dem. Seja $\Psi(x)$ uma matriz fundamental de (4.2.3). Como todas as soluções do sistema (4.2.3) são limitadas então $\|\Psi(x)\|$ também é limitada.

Pelo Teorema 4.2.3, tem-se

$$\det \Psi(x) = \det \Psi(x_0) e^{\int_{x_0}^x \text{Tr } A(t) dt}$$

e

$$\Psi^{-1}(x) = \frac{\text{adj } \Psi(x)}{\det \Psi(x)} = \frac{\text{adj } \Psi(x)}{\det \Psi(x_0) e^{\int_{x_0}^x \text{Tr } A(t) dt}}. \quad (4.5.21)$$

Então, por (4.5.20), $\|\Psi^{-1}(x)\|$ é limitada.

Considerando agora, em (4.2.16), o termo não homogêneo $b(x)$ na forma $B(x)v$, de modo a que cada solução $v(x)$ do sistema diferencial (4.5.18), com $v(x_0) = v^0$, verifica a equação integral

$$v(x) = \Psi(x)\Psi^{-1}(x_0)v^0 + \int_{x_0}^x \Psi(x)\Psi^{-1}(t)B(t)v(t)dt. \quad (4.5.22)$$

Definindo

$$c := \max \left\{ \sup_{x \geq x_0} \|\Psi(x)\|, \sup_{x \geq x_0} \|\Psi^{-1}(x)\| \right\} \quad (4.5.23)$$

obtem-se

$$\|v(x)\| \leq c_0 + c^2 \int_{x_0}^x \|B(t)\| \|v(t)\| dt,$$

com $c_0 = c \|\Psi^{-1}(x_0)v^0\|$. Esta desigualdade implica que

$$\|v(x)\| \leq c_0 e^{c^2 \int_{x_0}^x \|B(t)\| dt}.$$

Por (4.5.3) tem-se a conclusão pretendida. ■

Teorema 4.5.13 *Seja $\Psi(x)$ a matriz fundamental de (4.2.3) tal que*

$$\|\Psi(x)\Psi^{-1}(t)\| \leq c, \quad x_0 \leq t \leq x < +\infty, \quad (4.5.24)$$

com c uma constante positiva, e suponha-se que a condição (4.5.3) se verifica. Então:

- (i) Todas as soluções de (4.5.18) são limitadas em $[x_0 + \infty[$.
(ii) Se todas as soluções de (4.2.3) tendem para zero quando $x \rightarrow +\infty$, o mesmo acontece para todas as soluções de (4.5.18).

Dem. Utilizando (4.5.24) em (4.5.22) tem-se

$$\|v(x)\| \leq c \|v^0\| + c \int_{x_0}^x \|B(t)\| \|v(t)\| dt$$

e, portanto,

$$\|v(x)\| \leq c \|v^0\| e^{c \int_{x_0}^{+\infty} \|B(t)\| dt} := M < +\infty.$$

Então cada solução do sistema diferencial (4.5.18) é limitada em $[x_0 + \infty[$.

A igualdade (4.5.22) é análoga a

$$\begin{aligned} v(x) &= \Psi(x)\Psi^{-1}(x_0)v^0 + \int_{x_0}^{x_1} \Psi(x)\Psi^{-1}(t)B(t)v(t)dt \\ &\quad + \int_{x_1}^x \Psi(x)\Psi^{-1}(t)B(t)v(t)dt \end{aligned}$$

e conclui-se que

$$\begin{aligned} \|v(x)\| &\leq \|\Psi(x)\| \|\Psi^{-1}(x_0)\| \|v^0\| + \|\Psi(x)\| \int_{x_0}^{x_1} \|\Psi^{-1}(t)\| \|B(t)\| \|v(t)\| dt \\ &\quad + cM \int_{x_1}^{+\infty} \|B(t)\| dt. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, por (4.5.3), o último termo da expressão acima pode ser considerado como menor que $\frac{\epsilon}{2}$, escolhendo x_1 suficientemente grande.

Como todas as soluções de (4.2.3) tendem para zero, é necessário que $\|\Psi(x)\| \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$. Assim a soma dos primeiros dois termos do segundo membro pode ser considerado arbitrariamente pequeno, por exemplo menor que $\frac{\epsilon}{2}$, desde que se escolha x suficientemente grande. Então $\|v(x)\| < \epsilon$, para x grande, ou seja, $\|v(x)\| \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$. ■

As condições (4.5.20) e (4.5.24) podem ser substituídas pela periodicidade da matriz $A(x)$:

Teorema 4.5.14 Considere-se $A(x)$ uma matriz periódica de período ω em $[x_0 + \infty[$ e admita-se que a condição (4.5.3) se verifica. Então:

- (i) Todas as soluções de (4.5.18) são limitadas em $[x_0 + \infty[$ desde que o

mesmo aconteça a todas as soluções de (4.2.3).

(ii) Todas as soluções de (4.5.18) tendem para zero quando $x \rightarrow +\infty$ desde que o mesmo aconteça a todas as soluções de (4.2.3).

Dem. Dada uma matriz fundamental $\Psi(x)$ de (4.2.3), o Teorema 4.4.6 implica que $\Psi(x) = P(x) e^{Rx}$, com $P(x)$ uma matriz não singular, periódica de período ω , e R uma matriz constante. Aplicando estes dados em (4.5.22) tem-se

$$v(x) = P(x) e^{R(x-x_0)} P^{-1}(x_0) v^0 + \int_{x_0}^x P(x) e^{Rx} e^{-Rt} P^{-1}(t) B(t) v(t) dt$$

e, por conseguinte,

$$\begin{aligned} \|v(x)\| &\leq \|P(x)\| \|e^{Rx}\| \|e^{-Rx_0} P^{-1}(x_0) v^0\| \\ &\quad + \int_{x_0}^x \|P(x)\| \|e^{R(x-t)}\| \|P^{-1}(t)\| \|B(t)\| \|v(t)\| dt \end{aligned} \quad (4.5.25)$$

Como $P(x)$ é uma matriz não singular e periódica, $\det P(x)$ é periódico e não se anula, ou seja, é limitado e não nulo em $[x_0 + \infty[$.

Definindo

$$c_4 := \max \left\{ \sup_{x \geq x_0} \|P(x)\|, \sup_{x \geq x_0} \|P^{-1}(x)\| \right\}$$

a desigualdade (4.5.25) pode ser substituída por

$$\|v(x)\| \leq c_5 \|e^{Rx}\| + c_4^2 \int_{x_0}^x \|e^{R(x-t)}\| \|B(t)\| \|v(t)\| dt, \quad (4.5.26)$$

com $c_5 = c_4 \|e^{-Rx_0} P^{-1}(x_0) v^0\|$.

Se todas as soluções de (4.2.3) são limitadas em $[x_0 + \infty[$, então é necessário que $\|e^{Rx}\| \leq c_6$ para todo $x \geq 0$. Portanto, por (4.5.26), obtem-se

$$\|v(x)\| \leq c_5 c_6 + c_4^2 c_6 \int_{x_0}^x \|B(t)\| \|v(t)\| dt,$$

o que conduz a

$$\|v(x)\| \leq c_5 c_6 e^{c_4^2 c_6 \int_{x_0}^x \|B(t)\| dt}.$$

A parte (i) conclui-se, assim, a partir de (4.5.3).

Por outro lado, se todas as soluções de (4.2.3) tendem para zero quando $x \rightarrow +\infty$, então existem constantes positivas c_7 e α tal que $\|e^{Rx}\| \leq c_7 e^{-\alpha x}$ para $x \geq 0$. Pela desigualdade (4.5.26) tem-se

$$\|v(x)\| \leq c_5 c_7 e^{-\alpha x} + c_4^2 c_7 \int_{x_0}^x e^{-\alpha(x-t)} \|B(t)\| \|v(t)\| dt,$$

o que conduz a

$$\|v(x)\| \leq c_5 c_7 e^{c_4^2 c_7 \int_{x_0}^x \|B(t)\| dt - \alpha x}.$$

Portanto, pela condição (4.5.3), obtem-se que $v(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$. ■

O sistema de equações diferenciais (4.2.1) também pode ser considerado como uma perturbação de (4.2.3).

Teorema 4.5.15 *Suponha-se que todas as soluções de (4.2.3) são limitadas em $[x_0, +\infty[$ e que pelo menos uma solução de (4.2.1) é limitada. Então todas as soluções de (4.2.1) são limitadas.*

Dem. Sejam $u^1(x)$ e $u^2(x)$ duas soluções do sistema diferencial (4.2.1). Então $\phi(x) = u^1(x) - u^2(x)$ é solução do sistema (4.2.3) e $u^1(x) = \phi(x) + u^2(x)$. Como $\phi(x)$ é limitada em $[x_0, +\infty[$, se $u^2(x)$ for uma solução limitada de (4.2.1) então resulta que $u^1(x)$ é também uma solução limitada de (4.2.1). ■

Do teorema anterior resulta que se todas as soluções de (4.2.3) tendem para zero quando $x \rightarrow +\infty$, e se uma solução de (4.2.1) também tende para zero, então o mesmo acontece para todas as soluções de (4.2.1).

Teorema 4.5.16 *Se todas as soluções de (4.2.3) são limitadas em $[x_0, +\infty[$, se se verifica a condição (4.5.20) e*

$$\int_{x_0}^{+\infty} \|b(t)\| dt < +\infty, \quad (4.5.27)$$

então todas as soluções de (4.2.1) são limitadas.

Dem. Seja $\Psi(x)$ uma matriz fundamental do sistema diferencial (4.2.3). Como cada solução de (4.2.3) é limitada, tal como no Teorema 4.5.12, $\|\Psi(x)\|$ e $\|\Psi^{-1}(x)\|$ são ambas limitadas em $[x_0, +\infty[$. Então existe uma constante finita, definida como em (4.5.23). Portanto, para qualquer solução $u(x)$ de (4.2.1) que verifique $u(x_0) = u^0$, a igualdade (4.2.16) permite obter

$$\|u(x)\| \leq c \|\Psi^{-1}(x_0)u^0\| + c^2 \int_{x_0}^x \|b(t)\| dt.$$

A prova fica concluída por (4.5.27). ■

4.6 Estabilidade de soluções

É de particular importância analisar condições de regularidade para que a solução do problema de valor inicial (4.1.3), $u(x, x_0, u^0)$, dependa de uma forma contínua de x , x_0 e u^0 , no ponto (x, x_0, u^0) , para x num certo intervalo finito $J = [x_0, x_0 + \alpha]$. Ou seja, **uma pequena variação em u^0 origina uma pequena alteração nas soluções $u(x, x_0, u^0)$** de (4.1.3).

Esta circunstância é, em regra verdade no caso contínuo e com um intervalo limitado $[x_0, x_0 + \alpha]$. Contudo o mesmo não acontece se se substituir este intervalo por um não limitado, por exemplo, $[x_0, +\infty[$, como se pode verificar, a título de exemplo, no problema de valor inicial

$$y' = ay, \quad y(0) = y_0, \quad (4.6.1)$$

cujas únicas soluções são $y(x, 0, y_0) = y_0 e^{ax}$. Designando as respectivas variações por $|\Delta y|$ e $|\Delta y_0|$ tem-se

$$|\Delta y| = |y(x, 0, y_0 + \Delta y_0) - y(x, 0, y_0)| = |\Delta y_0| e^{ax}$$

para $x \geq 0$. Assim, se $a \leq 0$ tem-se que $|\Delta y| = |\Delta y_0| e^{ax} \leq \delta$ sempre que $|\Delta y_0| \leq \delta$. Mas, se $a > 0$ o valor de $|\Delta y| \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$ por muito pequeno que seja $|\Delta y_0|$.

Uma solução $u(x, x_0, u^0)$ do problema de valor inicial (4.1.3), definida em $[x_0, +\infty[$, diz-se **estável** se pequenas variações em u^0 originam apenas pequenas mudanças nas soluções de (4.1.3), para $x \geq x_0$. Caso contrário a solução $u(x, x_0, u^0)$ diz-se **instável**.

Assim a solução $y(x) = y_0 e^{ax}$ do problema (4.6.1) é estável para $a \leq 0$ e instável para $a > 0$.

As próximas definições tipificam os comportamentos das soluções:

Definição 4.6.1 Uma solução $u(x) = u(x, x_0, u^0)$ do problema de valor inicial (4.1.3) diz-se **estável**, se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que $\|\Delta u^0\| < \delta$ implica que $\|u(x, x_0, u^0 + \Delta u^0) - u(x, x_0, u^0)\| < \varepsilon$.

Definição 4.6.2 Uma solução $u(x) = u(x, x_0, u^0)$ do problema de valor inicial (4.1.3) diz-se **instável** se não for estável.

Definição 4.6.3 Uma solução $u(x) = u(x, x_0, u^0)$ do problema de valor inicial (4.1.3) diz-se **assimptoticamente estável** se é estável e existe $\delta_0 > 0$ tal que $\|\Delta u^0\| < \delta_0$ implica

$$\|u(x, x_0, u^0 + \Delta u^0) - u(x, x_0, u^0)\| \rightarrow 0 \quad \text{se } x \rightarrow +\infty.$$

Estas definições foram introduzidas por A. Lyapunov em 1892, pelo que uma solução estável também se pode designar como **estável no sentido de Lyapunov**.

4.7 Sistemas autónomos planares

O sistema de equações diferenciais diz-se **autónomo** se a função $g(x, u)$ for independente de x . Assim um sistema autónomo **bidimensional** ou **planar** terá a forma

$$\begin{aligned} u_1' &= g_1(u_1, u_2) \\ u_2' &= g_2(u_1, u_2). \end{aligned} \quad (4.7.1)$$

Para estes sistemas admitir-se-á que quer **as funções** g_1 e g_2 , quer as suas **derivadas parciais são contínuas num domínio** D do plano $u_1 u_2$. Portanto, para qualquer ponto $(u_1^0, u_2^0) \in D$ o sistema diferencial (4.7.1), com as condições $u_1(x_0) = u_1^0$, $u_2(x_0) = u_2^0$, tem uma única solução num certo intervalo J que contenha x_0 .

O estudo dos sistemas autónomos planares (4.7.1) tem um duplo interesse: por um lado eles modelam um grande número de processos dinâmicos em vários ramos da Ciência e, por outro lado, o comportamento qualitativo das respectivas soluções pode ser ilustrado geometricamente no plano $u_1 u_2$.

O primeiro resultado é válido para estes sistemas e não é necessariamente verdadeiro para os sistemas não autónomos:

Teorema 4.7.1 *Se $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$ é uma solução do sistema diferencial (4.7.1) no intervalo $]\alpha, \beta[$, então, para qualquer constante c , a função $v(x) = (u_1(x+c), u_2(x+c))$ é também uma solução de (4.7.1) no intervalo $]\alpha - c, \beta - c[$.*

Dem. Como $v'(x) = u'(x+c)$ e $u'(x) = g(u(x))$ então

$$v'(x) = u'(x+c) = g(u(x+c)),$$

pelo que $v(x)$ é também uma solução de (4.7.1). ■

No domínio D do plano $u_1 u_2$ qualquer solução de (4.7.1) pode ser entendida como uma curva dada na forma paramétrica, $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$, com x como parâmetro.

A curva $u(x)$ é designada por **trajectória**, **órbita** ou **caminho** de (4.7.1) e ao plano $u_1 u_2$ chama-se **plano de fase**. Portanto, pelo Teorema 4.7.1, para qualquer constante c , as curvas $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$, com

$x \in]\alpha, \beta[$, e $v(x) = (u_1(x+c), u_2(x+c))$, com $x \in]\alpha - c, \beta - c[$, que são soluções distintas de (4.7.1), representam a mesma trajectória.

Teorema 4.7.2 *Por cada ponto $(u_1^0, u_2^0) \in D$ passa uma única trajectória do sistema diferencial autónomo (4.7.1).*

Dem. Suponha-se, por contradição, que existem duas trajectórias diferentes, $(u_1(x), u_2(x))$ e $(v_1(x), v_2(x))$, que passam por (u_1^0, u_2^0) . Então, pela unicidade de solução dos problemas de valor inicial, $u_1(x_0) = u_1^0 = v_1(x_1)$ e $u_2(x_0) = u_2^0 = v_2(x_1)$, com $x_0 \neq x_1$.

Pelo Teorema 4.7.1, $u_1^1(x) := u_1(x - x_1 + x_0)$ e $u_2^1(x) := u_2(x - x_1 + x_0)$ é também uma solução de (4.7.1). Como $u_1^1(x_1) = u_1(x_0) = u_1^0 = v_1(x_1)$ e $u_2^1(x_1) = u_2(x_0) = u_2^0 = v_2(x_1)$, então, pela unicidade dos problemas de valor inicial, tem-se que $u_1^1(x) \equiv v_1(x)$ e $u_2^1(x) \equiv v_2(x)$. Portanto, $(u_1(x), u_2(x))$ e $(v_1(x), v_2(x))$ são parametrizações diferentes que originam a mesma trajectória. ■

Exemplo 4.7.3 *O sistema diferencial*

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= -u_1 \end{aligned}$$

tem infinitas soluções

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \sin(x+c) \\ u_2(x) &= \cos(x+c), \end{aligned}$$

com $0 \leq c < 2\pi$, $x \in \mathbb{R}$, mas que representam a mesma trajectória: a circunferência unitária $u_1^2 + u_2^2 = 1$.

Definição 4.7.4 *Ao ponto $(u_1^0, u_2^0) \in D$, onde as funções g_1 e g_2 se anulam simultaneamente, chama-se **ponto crítico** de (4.7.1) (ou **ponto de equilíbrio**, **ponto estacionário** ou **ponto singular**).*

*Um ponto crítico (u_1^0, u_2^0) diz-se **isolado** se não existir mais nenhum ponto crítico numa certa vizinhança de (u_1^0, u_2^0) .*

De ora em diante por ponto crítico designar-se-á um ponto crítico isolado.

Exemplo 4.7.5 *No sistema*

$$\begin{aligned} u_1' &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ u_2' &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2, \end{aligned} \tag{4.7.2}$$

com $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, existe apenas o ponto crítico $(0, 0)$ em \mathbb{R}^2 .

Exemplo 4.7.6 *No pêndulo simples não amortecido dado pelo sistema*

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= -\frac{g}{L} \operatorname{sen}(u_1), \end{aligned}$$

existem uma infinidade de pontos críticos, dados por $(n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$, em \mathbb{R}^2 .

Se (u_1^0, u_2^0) é um ponto crítico de (4.7.1), então efectuando a substituição

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 - u_1^0 \\ v_2 &= u_2 - u_2^0 \end{aligned}$$

transforma-se (4.7.1) num sistema equivalente com $(0, 0)$ como ponto crítico. Assim, sem perda de generalidade, considerar-se-á $(0, 0)$ como ponto crítico de (4.7.1).

Uma técnica possível para estudar o sistema diferencial (4.7.1) na vizinhança do ponto crítico $(0, 0)$ é aproximá-lo por um sistema linear da forma de (4.7.2), na expectativa de que essa "boa" aproximação forneça soluções, que sejam também "boas" aproximações das soluções de (4.7.1).

Por exemplo, se o sistema (4.7.1) fosse escrito como

$$\begin{aligned} u_1' &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + h_1(u_1, u_2) \\ u_2' &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + h_2(u_1, u_2), \end{aligned} \tag{4.7.3}$$

com $h_1(0, 0) = h_2(0, 0) = 0$ e

$$\lim_{\substack{u_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 0}} \frac{h_1(u_1, u_2)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = \lim_{\substack{u_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 0}} \frac{h_2(u_1, u_2)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = 0,$$

então, pela teoria de estabilidade estudada nas secções anteriores, ter-se-ia:

Teorema 4.7.7 (i) *Se a solução nula de (4.7.2) é assintoticamente estável então a solução nula de (4.7.3) também é assintoticamente estável.*

(ii) *Se a solução nula de (4.7.2) é instável então a solução nula de (4.7.3) também é instável.*

(iii) *Se a solução nula de (4.7.2) é estável então a solução nula de (4.7.3) pode ser assintoticamente estável, estável ou instável.*

Se no sistema diferencial (4.7.1) as funções $g_1(u_1, u_2)$ e $g_2(u_1, u_2)$ admitirem derivadas parciais de 2ª ordem contínuas na vizinhança do ponto

crítico $(0, 0)$, então pela Fórmula de Taylor, o sistema (4.7.1) pode escrever-se na forma de (4.7.3) com

$$a_{11} = \frac{\partial g_1}{\partial u_1}(0, 0), \quad a_{12} = \frac{\partial g_1}{\partial u_2}(0, 0), \quad a_{21} = \frac{\partial g_2}{\partial u_1}(0, 0), \quad a_{22} = \frac{\partial g_2}{\partial u_2}(0, 0).$$

Se (u_1^0, u_2^0) é um ponto crítico de (4.7.1), então a função constante $u(x) \equiv (u_1^0, u_2^0)$ é solução de (4.7.1) e, pelo Teorema 4.7.2, nenhuma trajectória pode passar pelo ponto (u_1^0, u_2^0) .

O esquema de todas as trajectórias de um sistema designa-se por **retrato-fase** do sistema e desde que as soluções de (4.7.2) possam ser determinadas explicitamente então pode ser obtida uma descrição completa do seu retrato-fase. Como a natureza das soluções de (4.7.2) depende dos valores próprios da matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

ou seja, das raízes da equação

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0, \quad (4.7.4)$$

então o retrato-fase de (4.7.2) depende quase inteiramente das raízes λ_1 e λ_2 de (4.7.4).

Assim, analisam-se em separado vários casos:

Caso 1: λ_1 e λ_2 são valores próprios reais, distintos e com o mesmo sinal

Designando por v^1 e v^2 os correspondentes vectores próprios então, pelo Teorema 4.3.1, a solução geral de (4.7.2) é dada por

$$\begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 x} + c_2 \begin{bmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 x}, \quad (4.7.5)$$

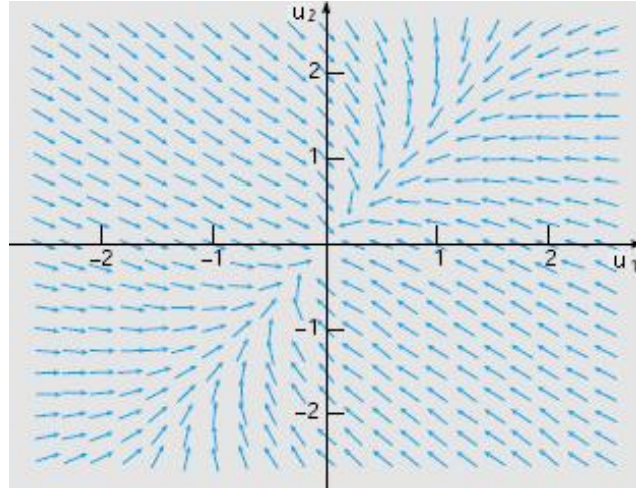
com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Suponha-se que $\lambda_1 > \lambda_2$ (o outro caso é análogo).

Se $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ então todas as soluções de (4.7.2) tendem para zero quando $x \rightarrow +\infty$, pelo que o ponto crítico $(0, 0)$ é assintoticamente estável. No caso de $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$ obtém-se $u_2 = \frac{v_2^2}{v_1^2} u_1$, isto é, as trajectórias são linhas rectas com declive $\frac{v_2^2}{v_1^2}$. Analogamente, se $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$ tem-se a recta $u_2 = \frac{v_2^1}{v_1^1} u_1$. Para obter outras trajectórias considere-se c_1 e c_2 ambos diferentes de zero. Então

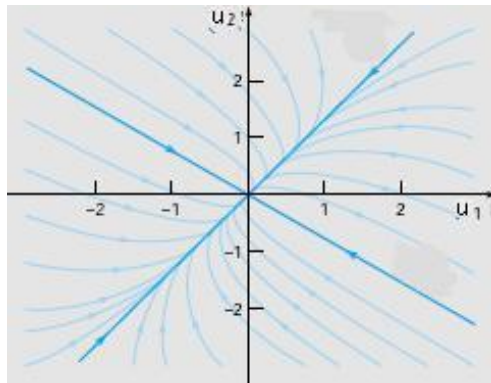
$$\frac{u_2(x)}{u_1(x)} = \frac{c_1 v_2^1 e^{\lambda_1 x} + c_2 v_2^2 e^{\lambda_2 x}}{c_1 v_1^1 e^{\lambda_1 x} + c_2 v_1^2 e^{\lambda_2 x}} = \frac{c_1 v_2^1 + c_2 v_2^2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}}{c_1 v_1^1 + c_2 v_1^2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}}, \quad (4.7.6)$$

tende para $\frac{v_2^1}{v_1^1}$ quando $x \rightarrow +\infty$, pelo que todas as trajectórias tendem para $(0,0)$ quando $x \rightarrow +\infty$. Do mesmo modo, quando $x \rightarrow -\infty$ todas as trajectórias se aproximam assintoticamente da recta de declive $\frac{v_2^2}{v_1^2}$.



Retrato-fase para $\lambda_2 = -4$ e $\lambda_1 = -1$

Esta situação pode ser ilustrada para um declive $\frac{v_2^2}{v_1^2} = \sqrt{2}$ pela figura seguinte, na qual o ponto crítico se designa por **nó estável**.



Trajectórias para $\frac{v_2^2}{v_1^2} = \sqrt{2}$

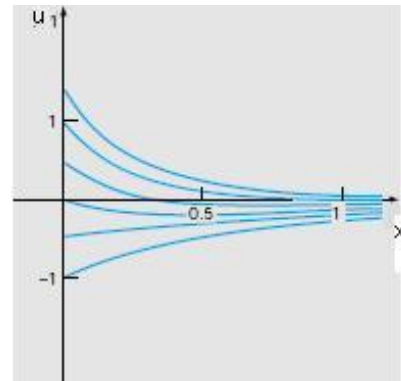


Gráfico de $u_1(x)$

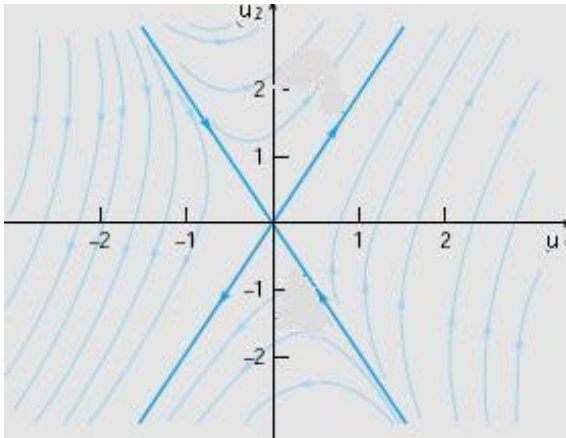
Se $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ então todas as soluções não triviais (4.7.2) tendem para infinito quando $x \rightarrow +\infty$, pelo que o ponto crítico $(0, 0)$ é instável. As trajectórias são como no caso $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, mas com sentidos opostos. Quando $x \rightarrow -\infty$, as trajectórias tendem para $(0, 0)$ com declive $\frac{v_2^2}{v_1^2}$ e quando $x \rightarrow +\infty$ aproximam-se assintoticamente da recta $u_2 = \frac{v_1^2}{v_2^2}u_1$. Neste caso o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é designado por **nó instável**.

Caso 2: λ_1 e λ_2 são valores próprios reais, distintos e com sinais opostos

A solução geral do sistema (4.7.2) é também dada por (4.7.5). Considere-se que $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Se $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$ então tem-se, tal como no primeiro caso, $u_2 = \frac{v_2^2}{v_1^2}u_1$ e, tanto $u_1(x)$ como $u_2(x)$, tendem para zero quando $x \rightarrow +\infty$.

Se $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$ então $u_2 = \frac{v_2^1}{v_1^1}u_1$, $u_1(x)$ e $u_2(x)$ tendem para infinito quando $x \rightarrow +\infty$ e aproximam-se de zero quando $x \rightarrow -\infty$.

Se c_1 e c_2 são ambos não nulos então, por (4.7.6), $\frac{u_2}{u_1}$ tende para $\frac{v_2^1}{v_1^1}$ quando $x \rightarrow +\infty$. Portanto, as trajectórias aproximam-se assintoticamente da recta com declive $\frac{v_2^1}{v_1^1}$, quando $x \rightarrow +\infty$. De modo análogo, quando $x \rightarrow -\infty$, as trajectórias tendem para a recta $u_2 = \frac{v_2^2}{v_1^2}u_1$. Ambas as funções, $u_1(x)$ e $u_2(x)$, tendem para infinito quando $x \rightarrow \pm\infty$.



Trajectórias para $\lambda_2 = -1$, $\lambda_1 = 3$

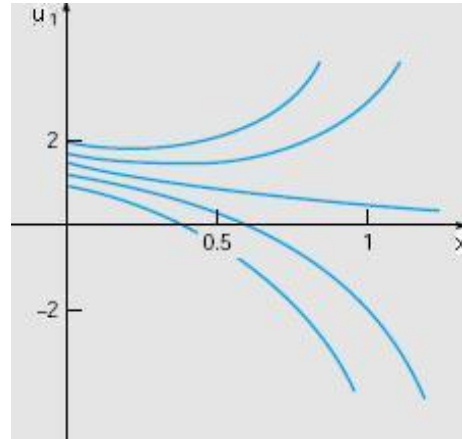


Gráfico de $u_1(x)$

Este tipo de ponto crítico chama-se **ponto de sela** e é um ponto crítico instável.

Caso 3: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Pelo Teorema 4.3.4, a solução geral do sistema (4.7.2) é da forma

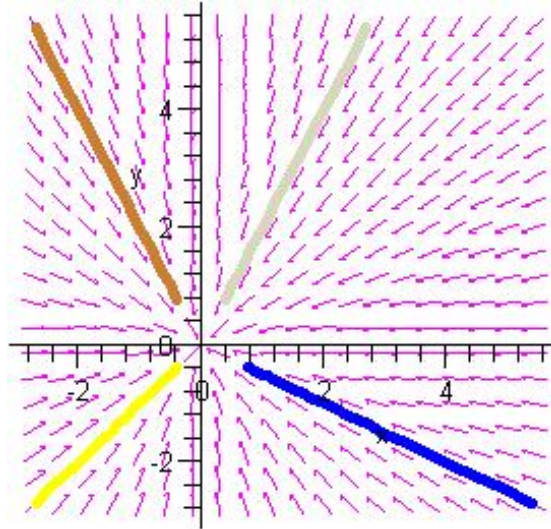
$$\begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 + (a_{11} - \lambda)x \\ a_{21}x \end{bmatrix} e^{\lambda x} + c_2 \begin{bmatrix} a_{12}x \\ 1 + (a_{22} - \lambda)x \end{bmatrix} e^{\lambda x}, \quad (4.7.7)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Se $\lambda < 0$, $u_1(x)$ e $u_2(x)$ tendem para zero quando $x \rightarrow +\infty$ pelo que o ponto crítico $(0, 0)$ de (4.7.2) é assintoticamente estável. Por outro lado, por (4.7.7),

$$\frac{u_2(x)}{u_1(x)} = \frac{c_2 + [a_{21}c_1 + (a_{22} - \lambda)c_2]x}{c_1 + [a_{12}c_2 + (a_{11} - \lambda)c_1]x}. \quad (4.7.8)$$

Em particular, se $a_{12} = a_{21} = 0$ e $a_{11} = a_{22} \neq 0$, pela equação (4.7.4) tem-se $\lambda = a_{11} = a_{22}$. Assim a razão anterior reduz-se a $\frac{u_2}{u_1} = \frac{c_2}{c_1}$, pelo que todas as trajectórias são linhas rectas com declive $\frac{c_2}{c_1}$. Nesta situação o campo de direcções é dado pela figura seguinte e a origem designa-se por **nó próprio estável**.



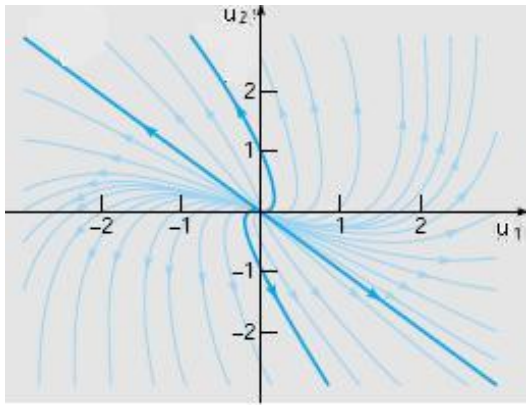
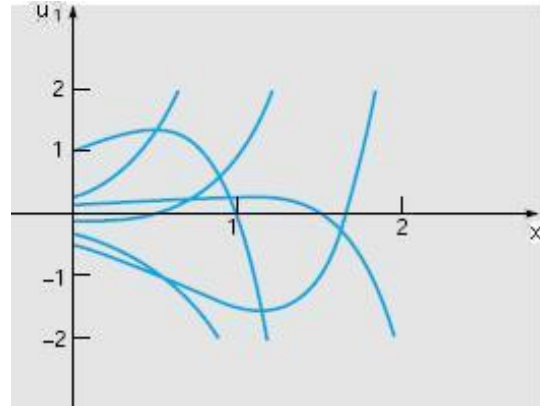
$$\lambda = a_{11} = a_{22}$$

No caso geral, quando $x \rightarrow \pm\infty$,

$$\frac{u_2(x)}{u_1(x)} \rightarrow \frac{a_{21}c_1 + (a_{22} - \lambda)c_2}{a_{12}c_2 + (a_{11} - \lambda)c_1} = \frac{a_{21}}{a_{11} - \lambda},$$

pois, pela equação característica, $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) = a_{12}a_{21}$. Portanto, quando $x \rightarrow \pm\infty$, todas as trajectórias são assintóticas com a recta $u_2 = \frac{a_{21}}{a_{11} - \lambda}u_1$. A origem diz-se então um **nó impróprio estável**.

Se $\lambda > 0$, todas as soluções tendem para $+\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$ e o ponto crítico $(0,0)$ de (4.7.2) é instável. As trajectórias são análogas às do caso $\lambda < 0$ excepto no sentido do movimento que é o inverso, como se ilustra na figura seguinte.

Trajectórias para $\lambda = 2$ Gráfico de $u_1(x)$

Caso 4: λ_1 e λ_2 são números complexos conjugados

Designa-se $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ e considere-se $\beta > 0$. Se o vector próprio da matriz A , correspondente a λ_1 , for $v = v_1 + iv_2$, então a solução do sistema (4.7.2) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{(\alpha+i\beta)x} (v_1 + iv_2) = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) (v_1 + iv_2) \\ &= e^{\alpha x} (v_1 \cos(\beta x) - v_2 \sin(\beta x)) + ie^{\alpha x} (v_1 \sin(\beta x) + v_2 \cos(\beta x)). \end{aligned}$$

Pelo Exercício 4.3.8,

$$u_1(x) = e^{\alpha x} (v_1 \cos(\beta x) - v_2 \sin(\beta x))$$

e

$$u_2(x) = e^{\alpha x} (v_1 \sin(\beta x) + v_2 \cos(\beta x))$$

são duas soluções reais, linearmente independentes de (4.7.2). Além disso toda a solução de (4.7.2) é forma

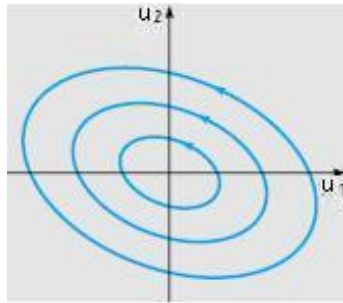
$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x),$$

que, pelas propriedades trigonométricas pode ser escrita como

$$\begin{aligned} u_1(x) &= r_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x - \delta_1) \\ u_2(x) &= r_2 e^{\alpha x} \cos(\beta x - \delta_2), \end{aligned} \quad (4.7.9)$$

com $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$, δ_1 e δ_2 constantes.

Se $\alpha = 0$ as funções $u_1(x) = r_1 \cos(\beta x - \delta_1)$ e $u_2(x) = r_2 \cos(\beta x - \delta_2)$ são periódicas, de período $\frac{2\pi}{\beta}$, e limitadas. Cada trajectória começa num ponto (u_1^*, u_2^*) , para $x = x^*$, e regressa ao mesmo ponto quando $x = x^* + \frac{2\pi}{\beta}$. Então as trajectórias são curvas fechadas em torno do ponto crítico $(0, 0)$, que é estável, mas não assintoticamente estável, e que se designa por **centro**.



Centro



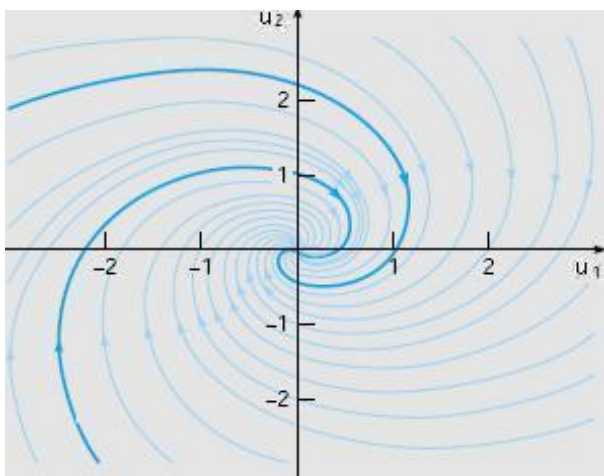
Gráfico de $u_1(x)$

Se $\alpha < 0$ o factor $e^{\alpha x}$ transforma as curvas fechadas simples em espirais. Isto acontece porque o ponto

$$\left(u_1 \left(\frac{2\pi}{\beta} \right), u_2 \left(\frac{2\pi}{\beta} \right) \right) = e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}} (u_1(0), u_2(0))$$

fica mais próximo da origem que $(u_1(0), u_2(0))$. Neste caso o ponto crítico $(0, 0)$, que é **assintoticamente estável**, designa-se como um **foco** ou

ponto de espiral.



Foco estável ($\alpha < 0$)

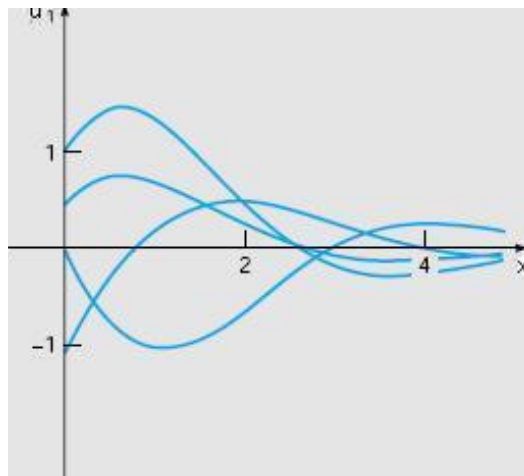


Gráfico de $u_1(x)$

Se $\alpha > 0$ todas as trajetórias de (4.7.2) são espirais que se afastam da origem, quando $x \rightarrow +\infty$. Neste caso o ponto crítico $(0,0)$ é instável e designa-se por **foco instável**.

Os casos anteriormente estudados podem ser resumidos no teorema:

Teorema 4.7.8 *Sejam λ_1 e λ_2 os valores próprios da matriz A do sistema diferencial (4.7.2). O comportamento das suas trajetórias, na proximidade do ponto crítico $(0,0)$, caracteriza-se por:*

1. *nó estável, se λ_1 e λ_2 são reais, distintos e negativos;*
2. *nó instável, se λ_1 e λ_2 são reais, distintos e positivos;*
3. *ponto de sela (instável), se λ_1 e λ_2 são reais, distintos e com sinais contrários;*
4. *nó estável, se λ_1 e λ_2 são reais, iguais e negativos;*
5. *nó instável, se λ_1 e λ_2 são reais, iguais e positivos;*
6. *centro estável, se λ_1 e λ_2 são imaginários puros;*
7. *foco estável, se λ_1 e λ_2 são complexos conjugados com a parte real negativa;*

8. *foco instável*, se λ_1 e λ_2 são complexos conjugados com a parte real positiva.

Um esquema da análise da estabilidade do sistema (4.7.2) pode ser ilustrado pela figura seguinte, definindo $p := \text{Tr}(A)$, $q := \det(A)$ e $\Delta = p^2 - 4q$.

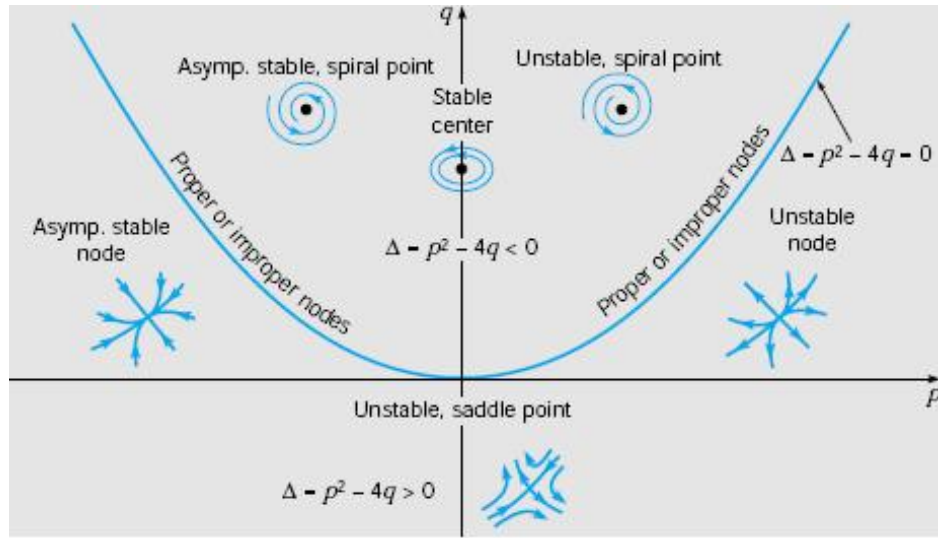


Diagrama de estabilidade de (4.7.2)

O comportamento do sistema diferencial (4.7.2) perto da origem também determina a natureza das trajetórias do **sistema não linear** (4.7.3), na vizinhança do ponto crítico $(0, 0)$.

Teorema 4.7.9 *No sistema diferencial (4.7.2), sejam λ_1 e λ_2 os valores próprios da matriz A . Então:*

1. *O sistema diferencial não linear (4.7.3) tem o mesmo tipo de ponto crítico na origem que o sistema linear (4.7.2), quando:*
 - (i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $(0, 0)$ é um nó do sistema (4.7.2);
 - (ii) $(0, 0)$ é um ponto de sela de (4.7.2);
 - (iii) $\lambda_1 = \lambda_2$ e $(0, 0)$ não é um nó próprio do sistema (4.7.2);
 - (iv) $(0, 0)$ é um foco de (4.7.2).

2. A origem não é necessariamente o mesmo tipo de ponto crítico nos dois sistemas. Mas :

- (i) se $\lambda_1 = \lambda_2$ e $(0,0)$ é um nó próprio do sistema (4.7.2), então $(0,0)$ é, ou um nó, ou um foco do sistema (4.7.3);
- (ii) se $(0,0)$ é um centro do sistema (4.7.2), então $(0,0)$ é, ou um centro, ou um foco do sistema (4.7.3).

Exemplo 4.7.10 O sistema diferencial não linear

$$\begin{aligned} u'_1 &= 1 - u_1 u_2 \\ u'_2 &= u_1 - u_2^3 \end{aligned} \quad (4.7.10)$$

tem como pontos críticos $(1,1)$ e $(-1,-1)$.

No primeiro caso, com as mudanças de variável $v_1 = u_1 - 1$ e $v_2 = u_2 - 1$ obtem-se um novo sistema

$$\begin{aligned} v'_1 &= 1 - (v_1 + 1)(v_2 + 1) = -v_1 - v_2 - v_1 v_2 \\ v'_2 &= (v_1 + 1) - (v_2 + 1)^3 = v_1 - 3v_2 - 3v_2^2 - v_2^3. \end{aligned} \quad (4.7.11)$$

Este último é um caso particular de (4.7.3) com $h_1(v_1, v_2) = -v_1 v_2$ e $h_2(v_1, v_2) = -3v_2^2 - v_2^3$ e que verificam

$$\lim_{\substack{v_1 \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 0}} \frac{h_1(v_1, v_2)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \lim_{\substack{u_1 \rightarrow 0 \\ u_2 \rightarrow 0}} \frac{h_2(v_1, v_2)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = 0.$$

O sistema linear associado a (4.7.11) é

$$\begin{aligned} v'_1 &= -v_1 - v_2 \\ v'_2 &= v_1 - 3v_2, \end{aligned} \quad (4.7.12)$$

onde a matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

tem os valores próprios $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, e a solução nula do sistema (4.7.12) é assintoticamente estável. Pelo Teorema 4.7.7, a solução nula do sistema (4.7.11) também é assintoticamente estável. Então o ponto crítico $(1,1)$ do sistema (4.7.10) é assintoticamente estável.

Por outro lado, pelo Teorema 4.7.8, a solução nula do sistema (4.7.12) é um nó estável e, pelo Teorema 4.7.9, a solução nula do sistema (4.7.11) é também um nó estável. Logo, o ponto crítico $(1,1)$ de (4.7.10) é um nó

estável.

De modo análogo, para o ponto $(-1, -1)$, utiliza-se a substituição $v_1 = u_1 + 1$ e $v_2 = u_2 + 1$ para obter o sistema

$$\begin{aligned} v'_1 &= 1 - (v_1 - 1)(v_2 - 1) = v_1 + v_2 - v_1 v_2 \\ v'_2 &= (v_1 - 1) - (v_2 - 1)^3 = v_1 - 3v_2 + 3v_2^2 - v_2^3. \end{aligned} \quad (4.7.13)$$

O sistema linear associado é

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_1 + v_2 \\ v'_2 &= v_1 - 3v_2, \end{aligned} \quad (4.7.14)$$

e a matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

tem os valores próprios $\lambda_1 = -1 + \sqrt{5} > 0$ e $\lambda_2 = -1 - \sqrt{5} < 0$. A solução nula do sistema (4.7.14) é um ponto de sela instável. Para o sistema não linear (4.7.13), a solução nula também é um ponto de sela instável. Então o ponto crítico $(-1, -1)$ do sistema (4.7.10) é um ponto de sela instável.

4.8 Exercícios

1. Resolva pelo método das aproximações sucessivas de Picard os problemas:

$$\text{a)} \quad u' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} u, \quad u(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{b)} \quad u' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, \quad u(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

2. Prove que o problema de ordem n

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= f(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) &= y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{aligned}$$

é equivalente à equação integral

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^i}{i!} y_i + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) dt.$$

3. Considere a equação diferencial linear homogênea

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_0 y = 0. \quad (4.8.1)$$

Mostre que:

a) Se $y(x)$ é solução de (4.8.1) e a função vectorial $u(x)$ é definida por $u^i(x) = y^{(i-1)}(x)$, $i = 1, \dots, n$, então $u' = A(x)u$, com

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & & -p_{n-1} \end{bmatrix};$$

b) Se $y_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, são n soluções de (4.8.1), então

$$u^k(x) = \left(y_k(x), y'_k(x), \dots, y_k^{(n-1)}(x) \right)^T, \quad 1 \leq k \leq n,$$

verifica o sistema $u' = A(x)u$;

$$\text{c)} \quad W(u^1, \dots, u^n)(x) = W(u^1, \dots, u^n)(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p_1(t) dt}.$$

4. Justifique que a matriz, de ordem n , $\Phi(x, t)$ em (4.2.15) verifica as relações:

- a) $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = A(x)\Phi(x, t);$
- b) $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t) = -\Phi(x, t)A(t);$
- c) $\Phi(x, t) = I + \int_t^x A(s)\Phi(s, t)ds;$
- d) $\Phi(x, t) = I + \int_t^x \Phi(x, s)A(s)ds.$

5. Um **controlador de malha aberta** pode ser escrito na forma

$$u' = Au + by(x), \quad z(x) = c^T u + dy(x),$$

sendo $y(x)$ e $z(x)$ funções escalares e d uma constante (escalar). Neste contexto $y(x)$ é o *input* conhecido e $z(x)$ o output desconhecido.

Se $u(0) = u^0$ é dado, prove que:

- a) $u(x) = e^{Ax}u^0 + \int_0^x e^{A(x-t)}by(t)dt;$
- b) $z(x) = c^T e^{Ax}u^0 + dy(x) + \int_0^x (c^T e^{A(x-t)}b) y(t)dt.$

A função $h(t) = c^T e^{A(x-t)}b$ designa-se por **impulso de resposta** do controlador.

6. Determine a solução geral dos sistemas diferenciais não homogêneos:

- a) $u' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} x \\ -2 - 4x \end{bmatrix};$
- b) $u' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} e^x \\ e^{3x} \\ 4 \end{bmatrix};$
- c) $u' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2 - x \\ 1 \\ 1 - x \end{bmatrix}.$

7. Resolva os problemas de valor inicial:

- a) $u' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} u, \quad u_1(0) = -2, \quad u_2(0) = 1;$
- b) $u' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x \cos 2x \end{bmatrix}, \quad u_1(0) = 0, \quad u_2(0) = 1,$
 $u_3(0) = 1;$

c) $u' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_1(0) = 0, \quad u_2(0) = 3,$
 $u_3(0) = 0.$

8. Duas matrizes de ordem n , A e B , dizem-se **semelhantes** se, e só se, existir uma matriz não singular P tal que $P^{-1}AP = B$.

Prove que:

a) $v(x)$ é solução do sistema $v' = Bv$ se, e só se, $u(x) = Pv(x)$, sendo $u(x)$ uma solução do sistema (4.2.12).

b) $e^{Ax} = Pe^{Bx}P^{-1}$.

9. Na equação

$$y' = ay + \operatorname{sen} x,$$

discuta a existência de uma única solução periódica nos casos:

a) $a = 0$;

b) $a > 0$;

c) $a < 0$.

10. Verifique que a equação

$$y' = y \cos^2 x$$

não admite soluções periódicas, apesar da função $\cos^2 x$ ser periódica de período π .

11. Considere a equação $y'' + y = \operatorname{sen}(2x)$.

a) Mostre que $y(x) = -\frac{1}{3}\operatorname{sen}(2x)$ é uma solução periódica;

b) Prove que a equação $y'' + y = 0$ admite também soluções periódicas não triviais;

c) Este exemplo contradiz o Corolário 4.4.2 ?

12. Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções da equação

$$y'' + p(x)y = 0,$$

com $p(x)$ uma função contínua e periódica de período ω , tais que

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1.$$

Justifique as afirmações:

a) O Wronskiano $W(y_1, y_2)(x) = 1$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

b) Existe pelo menos uma solução periódica não trivial $y(x)$ se e só se $y_1(\omega) + y_2'(\omega) = 2$.

c) Existe pelo menos uma solução **anti-periódica** não trivial $y(x)$, isto é, $y(x + \omega) = -y(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, se e só se $y_1(\omega) + y_2'(\omega) = -2$.

13. Considere a equação diferencial de 2^a ordem

$$y'' + p(x)y = 0 \quad (4.8.2)$$

e uma perturbação

$$z'' + (p(x) + q(x))z = 0, \quad (4.8.3)$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas em $[x_0 + \infty[$. Prove que se todas as soluções de (4.8.2) são limitadas em $[x_0 + \infty[$ e $\int_{x_0}^{+\infty} |q(t)|dt < +\infty$ então também todas as soluções de (4.8.3) são limitadas em $[x_0, +\infty[$.

14. Na equação (4.8.2) considere-se $p(x)$ uma função monótona com $p(x) \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$. Mostre que todas as soluções de (4.8.2) são limitadas em $[x_0, +\infty[$.

15. Justifique que todas as soluções das seguintes equações diferenciais são limitadas em $[x_0, +\infty[$:

a) $y'' + \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right)y = 0$

b) $y'' + 2y' + \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right)y = 0$.

16. Prove que não existem soluções limitadas para a equação

$$y'' + \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right)y = \cos x, \quad x \in [0, +\infty[.$$

17. Considere no sistema (4.2.3) a matriz $A(x)$ dada por

$$(i) \ A(x) = \begin{bmatrix} -x & 0 & 0 \\ 0 & -x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -x^2 \end{bmatrix}, \quad (ii) \ A(x) = \begin{bmatrix} -e^x & -1 & -\cos x \\ 1 & -e^{2x} & x^2 \\ \cos x & -x^2 & -e^{3x} \end{bmatrix}.$$

Mostre que, em qualquer dos casos, todas as soluções de (4.2.3) tendem para zero quando $x \rightarrow +\infty$.

18. Verifique que todas as soluções do sistema diferencial (4.2.1) com:

$$(i) \ A(x) = \begin{bmatrix} -e^{-x} & 0 \\ 0 & e^{-3x} \end{bmatrix}, \quad b(x) = \begin{bmatrix} \cos x \\ x \cos x^2 \end{bmatrix};$$

$$(ii) \quad A(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+x)^2} & \operatorname{sen} x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & 0 & x \\ 0 & -x & 0 \end{bmatrix}, \quad b(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{(1+x)^2} \\ \frac{1}{(1+x)^4} \end{bmatrix};$$

são limitadas em $[0, +\infty[$.

19. Considere o sistema (4.2.12) perturbado na forma

$$v' = Av + g(x, v), \quad (4.8.4)$$

com $g \in C([x_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Se esta função verifica

$$\|g(x, v)\| \leq \lambda(x) \|v\|, \quad (4.8.5)$$

com $\lambda(x)$ uma função contínua não negativa em $[x_0, +\infty[$, mostre que:

(i) Se todas as soluções do sistema (4.2.12) são limitadas e $\int_{x_0}^{+\infty} \lambda(t) dt < +\infty$ então todas as soluções de (4.8.4) são limitadas.

(ii) Se todas as soluções de (4.2.12) tendem para zero quando $x \rightarrow +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda(x) = 0$ então todas as soluções de (4.8.4) tendem para zero quando $x \rightarrow +\infty$.

20. Se o sistema (4.2.3) for também perturbado por uma função $g \in C([x_0, +\infty[\times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, isto é, na forma

$$v' = A(x)v + g(x, v), \quad (4.8.6)$$

e se a função g verifica (4.8.5) com $\int_{x_0}^{+\infty} \lambda(t) dt < +\infty$, prove que são verdadeiras as proposições:

(i) Se todas as soluções do sistema (4.2.3) são limitadas e se verifica (4.5.20) então todas as soluções de (4.8.6) são limitadas.

(ii) Se todas as soluções de (4.2.3) tendem para zero quando $x \rightarrow +\infty$ e se verifica (4.5.24) então todas as soluções de (4.8.6) tendem para zero quando $x \rightarrow +\infty$.

21. Analise a estabilidade, a estabilidade assintótica ou a instabilidade das soluções triviais dos seguintes sistemas:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad u' &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} u; \\ \text{b)} \quad u' &= \begin{bmatrix} -1 & -e^{2x} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} u; \\ \text{c)} \quad u' &= \begin{bmatrix} -1 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u. \end{aligned}$$

22. O movimento de um **pêndulo simples amortecido** é modelado pela equação

$$\theta'' + \frac{k}{m}\theta' + \frac{g}{L} \operatorname{sen}\theta = 0,$$

que é geralmente "linearizado" na forma

$$\theta'' + \frac{k}{m}\theta' + \frac{g}{L} \theta = 0. \quad (4.8.7)$$

Escreva a equação (4.8.7) na forma de sistema e analise a sua estabilidade.

23. Indique o tipo de estabilidade do ponto crítico $(0, 0)$ em cada um dos sistemas lineares e esboce o respectivo retrato-fase:

a) $\begin{cases} u_1' &= -2u_1 + u_2 \\ u_2' &= -5u_1 - 6u_2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1' &= 4u_1 + u_2 \\ u_2' &= 3u_1 + 6u_2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= 2u_1 - u_2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1' &= -2u_1 - 5u_2 \\ u_2' &= 2u_1 + 2u_2. \end{cases}$

24. Calcule todos os pontos críticos dos sistemas diferenciais e indique a sua natureza:

a) $\begin{cases} u_1' &= -u_1^2 + 4u_2^2 \\ u_2' &= 2u_1u_2 - 4u_2 - 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1' &= u_1(2u_2 - u_1 + 5) \\ u_2' &= u_1^2 + u_2^2 - 6u_1 - 8u_2. \end{cases}$

25. Mostre a existência de soluções periódicas não triviais em cada um dos sistemas:

a) $\begin{cases} u_1' &= 2u_1 - 2u_2 - u_1(u_1^2 + u_2^2) \\ u_2' &= 2u_1 + 2u_2 - u_2(u_1^2 + u_2^2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1' &= u_2 - \frac{u_1(u_1^2 + u_2^2 - 1)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \\ u_2' &= -u_1 - \frac{u_2(u_1^2 + u_2^2 - 1)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}. \end{cases}$

4.9 Actividades

Actividade 1:

1.1. Defina-se o conjunto

$$\Omega_1 := \left\{ (x, \phi_0, \dots, \phi_{n-1}) : |x - x_0| \leq a, \sum_{i=0}^{n-1} |\phi_i - y_i| \leq b \right\}$$

e considere-se que $f(x, \phi_0, \dots, \phi_{n-1})$:

(i) é contínua em Ω_1 , pelo que existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{\Omega_1} |f(x, \phi_0, \dots, \phi_{n-1})| \leq M;$$

(ii) satisfaz uma condição de Lipschitz uniforme em Ω_1 , isto é, para $(x, \phi_0, \dots, \phi_{n-1}), (x, \psi_0, \dots, \psi_{n-1}) \in \Omega_1$ existe uma constante $L > 0$ tal que

$$|f(x, \phi_0, \dots, \phi_{n-1}) - f(x, \psi_0, \dots, \psi_{n-1})| \leq L \sum_{i=0}^{n-1} |\phi_i - \psi_i|.$$

Prove que o problema

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) &= y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{aligned}$$

tem uma única solução no intervalo definido por

$$|x - x_0| \leq h := \min \left\{ a, \frac{b}{M_1} \right\},$$

com $M_1 = M + b + \sum_{i=0}^{n-1} |y_i|$.

1.2. Sejam $u(x)$, $v(x)$ e $w(x)$ soluções da equação diferencial $y''' + y = 0$ que verificam, respectivamente, as condições

$$\begin{aligned} u(0) &= 1, \quad u'(0) = 0, \quad u''(0) = 0, \\ v(0) &= 0, \quad v'(0) = 1, \quad v''(0) = 0, \\ w(0) &= 0, \quad w'(0) = 0, \quad w''(0) = 1. \end{aligned}$$

Sem resolver a equação diferencial, prove que:

- a) $u'(x) = -w(x)$.
- b) $v'(x) = u(x)$.
- c) $w'(x) = v(x)$.
- d) $W(u, v, w) = u^3 - v^3 + w^3 + 3uvw = 1$.

1.3. A equação diferencial

$$y'' + k_0^2 y = A \cos(kx),$$

modela o movimento de uma massa suspensa de uma mola, sem atrito e sujeita a uma força externa periódica, sendo k_0 a frequência natural do conjunto e k a frequência da força aplicada.

Se $k \neq k_0$, uma solução particular da equação será

$$y(x) = \frac{A}{k_0^2 - k^2} \cos(kx).$$

Logo, se a frequência aplicada k se aproximar suficientemente da frequência natural k_0 , então a solução particular terá oscilações de grande amplitude (fenômeno de **ressonância**).

Se $k = k_0$, a solução particular não pode ser obtida a partir da expressão anterior.

Mostre que, neste caso, a solução particular é dada por

$$y(x) = \frac{A}{2k_0} x \sin(k_0 x),$$

que **não é uma função periódica**.

Atividade 2:

2.1. O Wronskiano de n funções $y_1(x), \dots, y_n(x)$ que sejam $(n-1)$ vezes diferenciáveis no intervalo J , é definido pelo determinante:

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Prove que:

a) Se $W(y_1, \dots, y_n)(x)$ é diferente de zero em pelo menos um ponto de J , então as funções $y_1(x), \dots, y_n(x)$ são linearmente independentes em J .

b) Se as funções $y_1(x), \dots, y_n(x)$ são linearmente dependentes em J , então o Wronskiano $W(y_1, \dots, y_n)(x) = 0$ em J .

c) As proposições recíprocas de a) e b) não são necessariamente verdadeiras.

2.2. Considere a equação diferencial

$$y'' + p(x)y = 0, \quad (4.9.1)$$

com $\int_0^{+\infty} t |p(t)| dt < +\infty$.

Prove que:

a) para qualquer solução de (4.9.1), $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x)$ existe;

b) qualquer solução não trivial de (4.9.1) é assintótica à recta $d_0x + d_1$, para certas constantes d_0, d_1 não simultaneamente nulas.

2.3. Na equação diferencial de segunda ordem

$$y'' + (1 + p(x))y = 0,$$

com $p \in C^1([x_0, +\infty[)$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = 0 \quad \text{e} \quad \int_{x_0}^{+\infty} |p'(t)| dt < +\infty,$$

mostre que todas as soluções desta equação diferencial são limitadas em $[x_0, +\infty[$.

Actividade 3:

3.1. Seja $f(x, y)$ uma função contínua e não negativa para $x_0 < x < x_0 + a$, $0 \leq y \leq 2b$, com a propriedade de que apenas a solução $y(x)$ da equação diferencial $y' = f(x, y)$, em qualquer intervalo $]x_0, x_1[$, com $x_1 \in]x_0, x_0 + a[$, para o qual a derivada lateral direita, $y'_+(x_0)$, existe e

$$y(x_0) = y'_+(x_0) = 0,$$

é $y(x) \equiv 0$.

Considere-se ainda uma outra função contínua e não negativa $f_1(x, y)$ para $x_0 < x < x_0 + a$, $0 \leq y \leq 2b$, com $f_1(x, 0) \equiv 0$ e

$$f_1(x, y) \leq f(x, y), \quad x \neq x_0.$$

Prove que, para qualquer $x_1 \in]x_0, x_0 + a[$, $y(x) \equiv 0$ é a única função diferenciável em $[x_0, x_1[$, que verifica

$$y'_1 = f_1(x, y_1), \quad y_1(x_0) = 0.$$

3.2. Considere-se $f(x, y)$ nas condições da alínea anterior e $g(x, u)$ uma função contínua em

$$\Omega_+ := \{(x, u) : x_0 \leq x \leq x_0 + a, \quad \|u - u^0\| \leq b\}$$

com

$$\|g(x, u) - g(x, v)\| \leq f(x, \|u - v\|), \quad \forall (x, u), (x, v) \in \Omega_+, \quad x \neq x_0.$$

Mostre que o problema

$$u' = g(x, u), \quad u(x_0) = u^0,$$

tem, no máximo, uma solução.

Capítulo 5

Séries de Fourier

Ao longo deste capítulo considerar-se-á as séries de Fourier de um ponto de vista prático.

As séries de Fourier, envolvendo termos com senos e co-senos, podem ser utilizadas para representar funções periódicas, numa perspectiva mais geral. Por exemplo, podem ser aplicadas a funções periódicas não contínuas, algo a que as séries de Taylor não são aplicáveis.

5.1 Funções periódicas

Uma função $f(x)$ diz-se **periódica** no domínio D , se existir um número positivo T tal que

$$f(x + T) = f(x), \quad \forall x \in D. \quad (5.1.1)$$

O número T designa-se por **período** de $f(x)$.

O gráfico de uma função periódica $f(x)$ pode ser obtido pela repetição do gráfico de $f(x)$ em qualquer intervalo de comprimento T .

Os exemplos mais familiares são as funções trigonométricas seno, co-seno, tangente,...

As funções constantes $f(x) \equiv k$ ($k \in \mathbb{R}$) são funções periódicas, para qualquer valor de $T > 0$.

Como

$$f(x + 2T) = f((x + T) + T) = f(x + T) = f(x),$$

então, para $n \in \mathbb{Z}$,

$$f(x + nT) = f(x), \quad \forall x \in D.$$

Assim $2T, 3T, \dots$ são também períodos de $f(x)$.

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções periódicas, de período T , então a função

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x),$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, também é uma função periódica, de período T .

Se uma função periódica $f(x)$ tem um período mínimo $T(> 0)$, então designa-se por **período fundamental** de $f(x)$.

Para $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ o período fundamental é 2π , mas, para $\cos(2x)$ e $\operatorname{sen}(2x)$ o período fundamental é π .

As funções constantes são periódicas, mas não têm período fundamental.

5.2 Séries trigonométricas

O objectivo desta e das próximas secções será o de representar várias funções de período $T = 2\pi$, em termos de funções simples

$$1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos(2x), \operatorname{sen}(2x), \dots, \cos(nx), \operatorname{sen}(nx), \dots \quad (5.2.1)$$

Tal função teria o aspecto de

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos(2x) + b_2 \operatorname{sen}(2x) + \dots,$$

onde $a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots$ são números reais. Utilizando a notação de série, pode escrever-se

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)). \quad (5.2.2)$$

Esta série designa-se por **série trigonométrica** e os números a_n e b_n por **coeficientes** da série.

Cada um dos termos da série (5.2.2) tem período 2π .

Então se a série (5.2.2) for convergente, a sua soma será uma função de período 2π .

Assim as séries trigonométricas podem ser utilizadas para representar qualquer função periódica f , com qualquer período T (Séries de Fourier).

A representação de uma certa função periódica $f(x)$ em termos de cosenos e senos, está apenas dependente da determinação dos coeficientes adequados a $f(x)$. Para tal utilizar-se-á as Fórmulas de Euler.

5.3 Fórmulas de Euler para os coeficientes

Suponha-se que $f(x)$ é uma função periódica, de período 2π , e integrável nesse período.

Admita-se que $f(x)$ pode ser representada por uma série trigonométrica,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)), \quad (5.3.1)$$

isto é, a série trigonométrica converge e a sua soma é $f(x)$.

Dada uma função $f(x)$ nestas condições, pretende-se calcular os coeficientes a_n e b_n correspondentes à série (5.3.1).

Cálculo de a_0

Integrando ambos os membros de (5.3.1) em $[-\pi, \pi]$, obtem-se

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) \right] dx.$$

Se for possível integrar termo a termo (convergência uniforme), então

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) dx \right).$$

Como todos estes integrais se anulam, tem-se

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (5.3.2)$$

Cálculo dos coeficientes a_n

Considere-se m um número natural.

Multiplique-se (5.3.1) por $\cos(mx)$ e integre-se em $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) \right] \cos(mx) dx. \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Integrando termo a termo, no segundo membro ficará

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \cos(mx) dx \right).$$

O primeiro integral é nulo.

Aplicando igualdades trigonométricas conhecidas tem-se

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)x) dx \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

e

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \cos(mx) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}((n+m)x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}((n-m)x) dx. \end{aligned}$$

Todos os integrais dos segundos membros se anulam excepto o segundo de (5.3.4), que é igual a π quando $n = m$.

Como em (5.3.3) este termo vem multiplicado por a_m , então o segundo termo de (5.3.3) é igual a πa_m , pelo que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.3.5)$$

Cálculo dos coeficientes b_n

Multiplicando (5.3.1) por $\text{sen}(mx)$, sendo m um número natural fixo, e integrando em $[-\pi, \pi]$ obtem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(mx) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)) \right] \text{sen}(mx) dx. \quad (5.3.6) \end{aligned}$$

Integrando termo a termo, o segundo membro da igualdade anterior toma a forma de

$$\begin{aligned} & a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \text{sen}(mx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \text{sen}(mx) dx \right). \end{aligned}$$

O primeiro integral é nulo e o mesmo acontece no segundo, para $n = 1, 2, 3, \dots$. No último integral tem-se

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \text{sen}(mx) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)x) dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)x) dx. \end{aligned}$$

O último termo é nulo e a primeira parcela do segundo membro anula-se para $n \neq m$ e é igual a π quando $n = m$.

Substituindo em (5.3.6), obtem-se

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(nx) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.3.7)$$

Os números dados por (5.3.2), (5.3.5) e (5.3.7) designam-se por **coeficientes de Fourier** de $f(x)$ e, para estes valores, a série trigonométrica

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)),$$

designa-se por **série de Fourier** de $f(x)$.

Sublinhe-se que, até aqui, não há referência ao tipo de convergência da série.

Exercício 5.3.1 (*Onda rectangular*)

a) Determinar a série de Fourier correspondente à função

$$f(x) = \begin{cases} -k & , \quad -\pi < x < 0 \\ k & , \quad 0 < x < \pi \end{cases} , \quad k > 0, \quad f(x+2\pi) = f(x).$$

b) Utilize a série da alínea anterior para encontrar a soma da série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Resolução:

a) Por (5.3.2) conclui-se que $a_0 = 0$.

Por (5.3.5), obtem-se

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -k \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} k \cos(nx) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[-k \frac{\text{sen}(nx)}{n} \right]_{-\pi}^0 + \left[k \frac{\text{sen}(nx)}{n} \right]_0^{\pi} \right) = 0. \end{aligned}$$

De modo análogo, por (5.3.7),

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -k \text{sen}(nx) dx + \int_0^{\pi} k \text{sen}(nx) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[k \frac{\cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^0 - \left[k \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{k}{n\pi} [1 - \cos(-n\pi) - \cos(n\pi) + 1] = \frac{2k}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)]. \end{aligned}$$

Como

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} -1 & , \quad \text{se } n \text{ ímpar} \\ 1 & , \quad \text{se } n \text{ par} \end{cases}$$

então

$$1 - \cos(n\pi) = \begin{cases} 2 & , \quad \text{se } n \text{ ímpar} \\ 0 & , \quad \text{se } n \text{ par.} \end{cases}$$

Assim, os coeficientes de Fourier b_n da função dada serão

$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4k}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \dots,$$

pelo que a série de Fourier de $f(x)$ é

$$\frac{4k}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{5} \operatorname{sen}(5x) + \dots \right).$$

b) Admitindo que a série é convergente, tem-se

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{5} \operatorname{sen}(5x) + \dots \right)$$

e

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k = \frac{4k}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right),$$

pelo que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Este resultado espectacular, que foi obtido por Leibniz em 1673 utilizando argumentos geométricos, ilustra como a soma de algumas séries numéricas pode ser obtida através do cálculo de séries de Fourier, calculadas em pontos específicos.

5.4 Ortogonalidade

As funções $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., definidas no intervalo $[a, b]$, dizem-se **ortogonais** em $[a, b]$, em relação a uma **função peso** $p(x) > 0$, se

$$\int_a^b p(x) f_m(x) f_n(x) dx = 0, \quad \text{para } m \neq n.$$

Se $p(x) \equiv 1$ então diz-se apenas que as funções são ortogonais em $[a, b]$.

A norma de $f_n(x)$ é dada por

$$\|f_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b p(x) (f_n(x))^2 dx}.$$

As funções dizem-se **ortonormais** em $[a, b]$ se forem ortogonais em $[a, b]$ e todas elas tiverem norma 1.

Exemplo 5.4.1 As funções $f_n(x) = \text{sen}(nx)$, $n = 1, 2, \dots$, formam um conjunto de funções ortogonal em $[-\pi, \pi]$, pois, para $m \neq n$, tem-se

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \text{sen}(mx) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x) dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m+n)x) dx = 0. \end{aligned}$$

Como

$$\|f_n(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(nx) dx = \pi, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

então $\|f_n(x)\| = \sqrt{\pi}$ e o correspondente conjunto ortonormal será

$$f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Exemplo 5.4.2 O conjunto de funções trigonométricas

$$1, \cos x, \text{sen} x, \cos(2x), \text{sen}(2x), \dots, \cos(nx), \text{sen}(nx), \dots$$

é ortogonal em $[-\pi, \pi]$, ou, devido à periodicidade, em qualquer intervalo de comprimento 2π .

De facto calculando o integral do produto entre quaisquer duas funções do conjunto, tem-se, para $m \neq n$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \text{sen}(mx) dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = 0$$

e para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, incluindo $m = n$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \cos(mx) dx = 0.$$

5.5 Convergência uniforme

Quando do estudo de séries de potências, foram abordados vários tipos de convergência, nomeadamente, convergência simples e absoluta.

O estudo da convergência uniforme é bastante útil, pois entre outras propriedades, permite derivar e integrar as séries termo a termo e fornece informações qualitativas sobre a função soma,...

Para definir a convergência uniforme, considere-se uma série cujos termos são as funções $f_0(x)$, $f_1(x)$, ..., isto é

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x). \quad (5.5.1)$$

É óbvio que, no caso particular de $f_n(x) = a_n (x - x_0)^n$, se está perante uma série de potências.

Suponha-se que esta série converge para todo o valor de x num certo conjunto infinito D . Então designa-se por $s_n(x)$ a soma parcial da série,

$$s_n = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x),$$

e por $s(x)$ a sua soma.

O que significa dizer que a série é convergente em D ?

Escolhendo $x = x_1 \in D$, pela definição de convergência da sucessão obtida em x_1 , para um $\varepsilon > 0$ dado é possível encontrar-se um $N_1(\varepsilon)$ tal que

$$|s(x_1) - s_n(x_1)| < \varepsilon, \quad \text{quando } n > N_1(\varepsilon).$$

Se se escolher agora $x_2 \in D$ e se proceder do mesmo modo, encontra-se $N_2(\varepsilon)$ tal que

$$|s(x_2) - s_n(x_2)| < \varepsilon, \quad \text{quando } n > N_2(\varepsilon),$$

e assim sucessivamente. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, a cada $x \in D$ corresponde um número $N_x(\varepsilon)$. Este número indica-nos quantos termos da sucessão é necessário tomar (qual é o n em s_n) no ponto x de modo a que $|s(x) - s_n(x)|$ seja menos que ε .

Este valor de n mede a **rapidez de convergência**. Pequenos valores de $N_x(\varepsilon)$ indicam uma convergência rápida, enquanto valores grandes significam uma convergência lenta.

Se for possível tomar um $N(\varepsilon)$ maior que todos estes $N_x(\varepsilon)$, diz-se que a **convergência é uniforme**:

Definição 5.5.1 A série (5.5.1) com soma $s(x)$ diz-se **uniformemente convergente** no conjunto D se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existir $N = N(\varepsilon)$, não dependente de x , tal que

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{para } n > N(\varepsilon), \quad \forall x \in D.$$

Exercício 5.5.2 Considere a série geométrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Mostre que:

- a) a série é uniformemente convergente numa bola fechada $|x| \leq r < 1$;
 b) a série não é uniformemente convergente em todo o intervalo de convergência $|x| < 1$.

Resolução:

- a) Para x naquela bola fechada tem-se $|1 - x| \geq 1 - r$.
 Então

$$\frac{1}{|1 - x|} \leq \frac{1}{1 - r}$$

e

$$|s(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{1 - x} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1 - r}.$$

Como $r < 1$, o último membro é tão pequeno quanto n for grande. Escolhendo n suficientemente grande, como este membro não depende de x , obtém-se a convergência uniforme.

- b) Para uns certos valores de K real e n natural, é sempre possível encontrar uma bola $|x| < 1$ tal que

$$\left| \frac{x^{n+1}}{1 - x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1 - r} > K.$$

Bastará considerar x suficientemente perto de 1. Portanto não existe um número $N(\varepsilon)$ que torne $|s(x) - s_n(x)|$ menor que um $\varepsilon > 0$ dado, em toda a bola.

Logo a convergência da série geométrica em $|x| < 1$ não é uniforme.

Este exemplo sugere que a convergência uniforme pode apresentar problemas na fronteira do intervalo de convergência. Para se poder dar uma resposta a esta hipótese recorde-se alguns resultados sobre convergência de séries:

Teorema 5.5.3 (*Critério de convergência de Cauchy*) A série $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ é convergente se, e só se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existir $N(\varepsilon)$ tal que

$$|u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon, \quad \text{para } n > N(\varepsilon) \text{ e } p \in \mathbb{N}.$$

Teorema 5.5.4 (*Convergência de uma série de potências*) Considere-se a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \quad (5.5.2)$$

- (i) Toda a série de potências (5.5.2) converge no centro x_0 .
(ii) Se a série (5.5.2) converge num ponto $x = x_1 \neq x_0$, então converge absolutamente para todo o valor de x mais próximo de x_0 do que x_1 , isto é, para

$$|x - x_0| < |x - x_1|.$$

- (iii) Se a série (5.5.2) diverge num ponto $x = x_2$, então também diverge para qualquer ponto x mais afastado de x_0 que de x_2 .

Teorema 5.5.5 A série de potências (5.5.2), com um raio de convergência $R > 0$, é uniformemente convergente em todo o intervalo de convergência $|x - x_0| \leq r < R$.

Dem. Para x no conjunto $|x - x_0| \leq r$ e quaisquer naturais n e p tem-se

$$\left| a_{n+1} (x - x_0)^{n+1} + \dots + a_{n+p} (x - x_0)^{n+p} \right| \leq |a_{n+1}| r^{n+1} + \dots + |a_{n+p}| r^{n+p} \quad (5.5.3)$$

Pelo Teorema 5.5.4, a série (5.5.2) converge absolutamente se $|x - x_0| \leq r < R$. Assim pelo Critério de Cauchy (Teorema 5.5.3), dado $\varepsilon > 0$, é possível encontrar um número natural $N(\varepsilon)$ tal que

$$|a_{n+1}| r^{n+1} + \dots + |a_{n+p}| r^{n+p} < \varepsilon, \quad \text{para } n > N(\varepsilon) \text{ e } p \in \mathbb{N}.$$

Substituindo em (5.5.3) tem-se

$$\left| a_{n+1} (x - x_0)^{n+1} + \dots + a_{n+p} (x - x_0)^{n+p} \right| < \varepsilon.$$

Como $N(\varepsilon)$ é independente de x , tem-se a convergência uniforme. ■

Teorema 5.5.6 (*Continuidade da função soma*) *Considere-se que a série de funções*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots$$

é uniformemente convergente no conjunto D e designe-se por $f(x)$ a sua soma. Se cada um dos termos $f_n(x)$ for contínuo no ponto $x_0 \in D$, então a função soma $f(x)$ também é contínua em x_0 .

Dem. Seja $s_n(x)$ a soma parcial da série e $R_n(x)$ o resto correspondente, isto é,

$$s_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n \quad \text{e} \quad R_n = f_{n+1} + f_{n+2} + \dots$$

Como a série converge uniformemente, para $\varepsilon > 0$ dado, é possível encontrar $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in D.$$

Por outro lado, $s_N(x)$ é a soma de um número finito de funções que são contínuas em $x_0 \in D$, pelo que também é contínua em x_0 .

Portanto é possível ter $\delta > 0$ tal que

$$|s_N(x) - s_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in D \text{ com } |x - x_0| < \delta.$$

Considerando $f = s_N + R_N$ e a desigualdade triangular, para estes valores de x , tem-se

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |s_N(x) + R_N(x) - s_N(x_0) - R_N(x_0)| \\ &\leq |s_N(x) - s_N(x_0)| + |R_N(x)| + |R_N(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

pelo que f é contínua em $x_0 \in D$. ■

Exercício 5.5.7 *Mostre que a série*

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^3} + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$$

é formada por termos contínuos em \mathbb{R} mas tem uma soma descontínua.

Resolução:

A série pode ser considerada como o produto de uma série geométrica de razão $\frac{1}{1+x^2}$ pelo factor x^2 .

A soma parcial será então

$$s_n(x) = x^2 \left[1 + \frac{1}{1+x^2} + \dots + \frac{1}{(1+x^2)^n} \right]$$

e, multiplicando ambos os membros,

$$-\frac{1}{1+x^2} s_n(x) = -x^2 \left[\frac{1}{1+x^2} + \dots + \frac{1}{(1+x^2)^n} + \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \right].$$

Adicionando estas duas expressões e simplificando, obtém-se

$$\frac{x^2}{1+x^2} s_n(x) = x^2 \left[1 - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \right],$$

pelo que

$$s_n(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Se $x \neq 0$, a soma é

$$s(x) = \lim s_n(x) = 1 + x^2.$$

Se $x = 0$, tem-se $s_n(0) = 1 - 1 = 0$, para qualquer valor de n . Então $s(0) = 0$.

Logo a soma é uma função descontínua em $x = 0$, apesar de todos os termos da série serem funções contínuas em \mathbb{R} .

Assim, pelo Teorema 5.5.6 a série não pode convergir uniformemente em qualquer intervalo que contenha 0, apesar de ser absolutamente convergente.

Este exercício prova que **não existe nenhuma relação entre convergência absoluta e convergência uniforme**.

E o recíproco?

Exercício 5.5.8 Prove que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{x^2 + k} = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 2} + \frac{1}{x^2 + 3} - \dots \quad (x \in \mathbb{R})$$

converge uniformemente em \mathbb{R} , mas não converge absolutamente em \mathbb{R} .

Resolução:

Pelo Critério de Leibniz para séries alternadas, o valor absoluto do resto é majorado pelo valor absoluto do primeiro termo desprezado. Então

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{x^2 + n + 1} < \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \text{para } n > N(\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Como $N(\varepsilon)$ não depende de x , tem-se a convergência uniforme.

A convergência absoluta não se verifica, pois

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{x^2 + k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + k}.$$

Para x fixo, é possível encontrar uma constante δ tal que

$$\frac{1}{x^2 + k} > \frac{\delta}{k}$$

e a série $\delta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ é divergente (série harmónica).

Assim o facto de uma série ser uniformemente convergente não fornece nenhuma informação sobre a sua convergência absoluta.

O "simples" facto de trocar a ordem entre operadores de integração e somas pode conduzir a erros grosseiros.

Veja-se o seguinte caso:

Exercício 5.5.9 Considere a sucessão $u_n(x) = nx e^{-nx^2}$ e a série de Mengoli associada

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{com} \quad f_n(x) = u_n(x) - u_{n-1}(x),$$

no intervalo $[0, 1]$.

- a) Calcule a expressão das somas parciais, a soma $f(x)$ da série e $\int_0^1 f(x)dx$.
- b) Integre termo a termo e calcule o valor da série obtida.
- c) Compare os resultados obtidos nas duas alíneas anteriores.

Resolução:

a) A soma parcial é dada por

$$\begin{aligned} s_n &= f_1 + \dots + f_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \dots + u_n - u_{n-1} \\ &= u_n - u_0 = u_n. \end{aligned}$$

A soma será

$$f(x) = \lim s_n(x) = \lim u_n(x) = \lim nx e^{-nx^2} = 0,$$

pelo que

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

b) Integrando termo a termo e utilizando $s_n = f_1 + \dots + f_n$, tem-se

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 f_m(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^n \int_0^1 f_m(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 s_n(x) dx.$$

Como $s_n = u_n$, obtem-se

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 s_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 u_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (1 - e^{-n}) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

c) Como os resultados são diferentes significa que esta série não se pode integrar termo a termo no intervalo $[0, 1]$.

Em que condições é possível integrar, ou derivar, uma série termo a termo ?

Teorema 5.5.10 (Integração termo a termo) *Considere-se uma série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots = f(x)$$

uniformemente convergente, cujos termos são funções contínuas em D . Em qualquer intervalo $[a, b] \subseteq D$, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f_0(x) dx + \int_a^b f_1(x) dx + \dots \quad (5.5.4)$$

é convergente e tem como soma $\int_a^b f(x) dx$.

Dem. Pelo Teorema 5.5.6, a função $f(x)$ é contínua.

Sejam $s_n(x)$ a n -ésima soma parcial e $R_n(x)$ o resto correspondente. Então $f = s_n + R_n$ e, por integração,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b s_n(x) dx + \int_a^b R_n(x) dx.$$

Como a série inicial converge uniformemente, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \text{para } n > N, \quad \forall x \in D.$$

Assim

$$\left| \int_a^b R_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |R_n(x)| dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon, \quad \text{para } n > N.$$

Como $R_n = f - s_n$, tem-se

$$\left| \int_a^b R_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b s_n(x) dx \right| < \varepsilon, \quad \text{para } n > N,$$

pelo que a série (5.5.4) converge e tem por soma a função indicada. ■

Teorema 5.5.11 (*Derivação termo a termo*) Considere-se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots =$$

convergente em D e seja $f(x)$ a sua soma. Se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) = f'_0(x) + f'_1(x) + f'_2(x) + \dots$$

for uniformemente convergente e os seus termos funções contínuas em D , então

$$f'(x) = f'_0(x) + f'_1(x) + f'_2(x) + \dots, \quad \forall x \in D.$$

Uma forma prática de testar a convergência uniforme é fornecida pelo critério seguinte:

Teorema 5.5.12 (*Critério de Weierstrass*) Considere a série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ num conjunto D .

Se existir uma série numérica convergente formada por termos constantes, $M_0 + M_1 + M_2 + \dots$, tais que

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in D, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

então a série inicial é uniformemente convergente em D .

Dem. Exercício ■

Exercício 5.5.13 A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n + 1}{n^2 + \cosh(n|x|)}$$

é uniformemente convergente para $|x| \leq 1$?

Resolução: Como

$$\left| \frac{x^n + 1}{n^2 + \cosh(n|x|)} \right| \leq \frac{|x|^n + 1}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ é uma série convergente (série de Dirichlet), a resposta é afirmativa.

5.6 Convergência e soma das séries de Fourier

Suponha-se que $f(x)$ é uma função periódica dada, de período 2π , tal que os integrais referidos nos coeficientes de Fourier existem. Por exemplo bastará exigir que a função seja contínua, ou apenas seccionalmente contínua no intervalo respectivo. Seria ainda bastante "agradável" que as séries obtidas fossem convergentes e que tivessem por soma $f(x)$.

Nos casos em que as séries de Fourier de $f(x)$ representam de facto $f(x)$, escreve-se

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Quando a soma da série de Fourier de $f(x)$ não for $f(x)$, ou não for convergente, nota-se por

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

O próximo teorema fornece uma classe de funções que pode ser representadas pela sua série de Fourier:

Teorema 5.6.1 *Se uma função periódica $f(x)$, de período 2π , é seccionalmente contínua no intervalo $[-\pi, \pi]$ e admite derivadas laterais, esquerda e direita, em cada ponto do intervalo, então a série de Fourier (5.2.2) de $f(x)$ é convergente.*

Além disso, a sua soma é $f(x)$, excepto nos pontos de descontinuidade x_0 , em que a soma da série é a média dos limites laterais, esquerdo e direito, de $f(x)$ em x_0 .

Dem. A demonstração far-se-á apenas para os casos em que a função $f(x)$ é de classe C^2 $([-\pi, \pi])$.

Integrando por partes (5.3.5), tem-se

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ &= \left[\frac{f(x) \operatorname{sen}(nx)}{n\pi} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \operatorname{sen}(nx) dx. \end{aligned}$$

O primeiro termo do segundo membro é nulo e, integrando novamente por partes, obtem-se

$$a_n = \left[\frac{f'(x) \cos(nx)}{n^2\pi} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos(nx) dx.$$

Pela periodicidade e continuidade de $f'(x)$, o primeiro termo do segundo membro é nulo. Como $f''(x)$ é contínua no intervalo de integração, tem-se que também é limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que

$$|f''(x)| < M, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Como $|\cos(nx)| \leq 1$, conclui-se que

$$|a_n| = \frac{1}{n^2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos(nx) dx \right| < \frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M dx = \frac{2M}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De modo análogo se prova que $|b_n| < \frac{2M}{n^2}$, para $n \in \mathbb{N}$. Como cada termo da série é majorado, em valor absoluto, por $\frac{2M}{n^2}$, tem-se

$$|a_0| + 2M \left(1 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right),$$

que é uma série convergente, pelo que a série de Fourier é convergente.

O Critério de Weierstrass garante que, nas hipóteses assumidas, a série é uniformemente convergente. Assim a derivação e integração termo a termo está legitimada pelo Teorema 5.5.6.

A demonstração para o caso mais geral de funções seccionalmente $f(x)$ contínuas pode se vista, por exemplo, em

A. Zygmund, *Trygonometric series*, 2nd Ed., Cambridge University Press, 1988. ■

5.7 Funções com um período genérico $2L$

Até ao momento apenas se consideraram funções com período 2π . Contudo os resultados anteriores podem ser aplicados a funções periódicas com período diferente.

Uma aplicação clássica está relacionada com a vibração de uma corda de comprimento L .

Se a função $f(x)$ tiver período $2L$, então admite uma série de Fourier dada por

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right), \quad (5.7.1)$$

com os coeficientes de Fourier de $f(x)$ definidos pelas fórmulas de Euler

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad (5.7.2)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.7.3)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots. \quad (5.7.4)$$

Estas relações (5.7.1) até (5.7.4) podem, de facto, ser facilmente demonstradas por uma mudança de escala, isto é, por uma mudança de variável do tipo $v = \frac{\pi x}{L}$, isto é, $x = \frac{Lv}{\pi}$. É imediato que para $x = \pm L$ corresponde $v = \pm\pi$. Assim, f , considerada como uma função de v , que se designa por g , ou seja,

$$f(x) = g(v), \quad (5.7.5)$$

tem período 2π .

De acordo com as fórmulas dos coeficientes de Fourier então obtidas, tem-se agora, com a nova variável,

$$g(v) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nv) + b_n \operatorname{sen}(nv)), \quad (5.7.6)$$

com os coeficientes

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(v) dv, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(v) \cos(nv) dv, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(v) \operatorname{sen}(nv) dv, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5.7.7)$$

Aplicando em (5.7.7) uma integração por substituição com a variável $x = \frac{Lv}{\pi}$, os limites de integração $v = \pm\pi$ ficam $x = \pm L$. Assim, por (5.7.5), tem-se

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(v) dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(x) \frac{\pi}{L} dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

Nas outras expressões o processo é análogo.

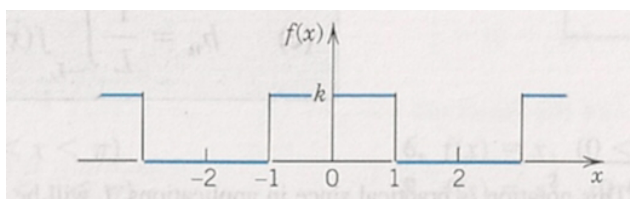
O intervalo de integração em (5.7.7) pode ser substituído por qualquer intervalo de comprimento $2L$, por exemplo $[0, 2L]$.

O Teorema 5.6.1 permanece válido, com alterações óbvias, para um período $2L$.

Exercício 5.7.1 *Determine a série de Fourier para a função periódica, de período 4,*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -2 < x < -1 \\ k & , \quad -1 < x < 1 \\ 0 & , \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

Resolução:



Por (5.7.2) e (5.7.3) tem-se

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 k dx = \frac{k}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 k \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{2k}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Então $a_n = 0$ se n é par e

$$a_n = \frac{2k}{n\pi} \text{ se } n = 1, 5, 9, \dots,$$

$$a_n = -\frac{2k}{n\pi} \text{ se } n = 3, 7, 11, \dots$$

Por (5.7.4), obtem-se $b_n = 0$ para $n = 1, 2, \dots$. Portanto

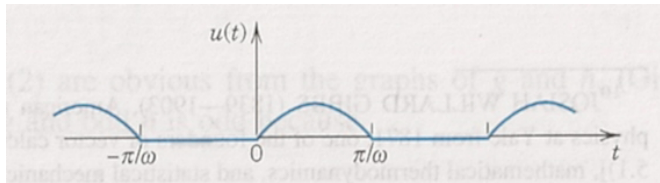
$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{1}{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right) + \frac{1}{5} \cos\left(\frac{5\pi}{2}x\right) - \dots \right)$$

Exercício 5.7.2 Calcule a série de Fourier para a função periódica, de período $\frac{2\pi}{\omega}$,

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , \quad -L < t < 0 \\ E \operatorname{sen}(\omega t) & , \quad 0 < t < L. \end{cases}$$

Resolução:

Esta função pode ser entendida como uma semi-onda rectificada da sinusóide $E \operatorname{sen}(\omega t)$, que anula a parte negativa da onda:



Como $u = 0$ para $-L < t < 0$, então

$$a_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E \operatorname{sen}(\omega t) dt = \frac{E}{\pi}.$$

Utilizando fórmulas trigonométricas conhecidas

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E \operatorname{sen}(\omega t) \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{\omega E}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} [\operatorname{sen}((1+n)\omega t) + \operatorname{sen}((1-n)\omega t)] dt. \end{aligned}$$

Se $n = 1$, o último integral é nulo e, para $n = 2, 3, \dots$, obtem-se

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega E}{2\pi} \left[-\frac{\cos((1+n)\omega t)}{((1+n)\omega t)} - \frac{\cos((1-n)\omega t)}{((1-n)\omega t)} \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} \\ &= \frac{E}{2\pi} \left[\frac{-\cos((1+n)\pi) + 1}{1+n} + \frac{-\cos((1-n)\pi) + 1}{1-n} \right]. \end{aligned}$$

Se n é ímpar esta última expressão é nula. Se n é par tem-se

$$a_n = \frac{E}{2\pi} \left(\frac{2}{1+n} + \frac{2}{1-n} \right) = -\frac{2E}{(n-1)(n+1)\pi}, \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

De modo análogo se pode calcular que $b_1 = \frac{E}{2}$ e $b_n = 0$, para $n = 2, 3, 4, \dots$. Assim

$$u(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \operatorname{sen}(\omega t) - \frac{E}{2\pi} \left(\frac{1}{1 \times 3} \cos(2\omega t) + \frac{1}{3 \times 5} \cos(4\omega t) + \dots \right)$$

5.8 Expansão em séries de senos e co-senos

A função do Exercício 5.7.1 é par e a série de Fourier correspondente tem apenas termos com co-senos.

Não é apenas uma coincidência. De facto pode ser evitado trabalho desnecessário, na determinação dos coeficientes de Fourier, se a função é par ou ímpar.

Recorde-se as definições:

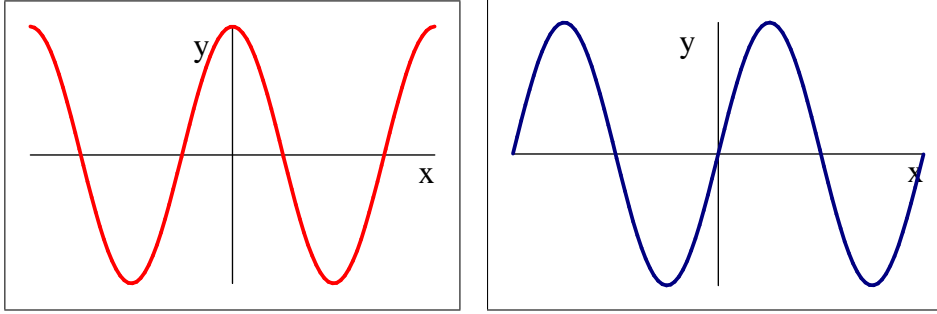
Definição 5.8.1 Uma função $g(x)$ é **par** se

$$g(-x) = g(x), \quad \forall x \in D_g.$$

Uma função $h(x)$ é **ímpar** se

$$h(-x) = -h(x), \quad \forall x \in D_h.$$

Exemplos: A função $\cos(nx)$ é par e a função $\sin(nx)$ é ímpar.



Algumas das propriedades mais importantes, utilizadas neste capítulo e relacionadas com a paridade da função, apresentam-se na seguinte proposição:

Proposição 5.8.2 1. Se $g(x)$ é uma função **par** então

$$\int_{-L}^L g(x) dx = 2 \int_0^L g(x) dx. \quad (5.8.1)$$

2. Se $h(x)$ é uma função **ímpar** então

$$\int_{-L}^L h(x) dx = 0. \quad (5.8.2)$$

3. O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.

Dem. As alíneas 1. e 2. são imediatas (e até intuitivas pelos gráficos das funções)

Para 3., designe-se por $q := gh$. Então

$$q(-x) = g(-x)h(-x) = g(x)h(-x) = -g(x)h(x) = -q(x).$$

■

Portanto se $f(x)$ é uma função par então $f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é uma função ímpar, pelo que, por (5.7.4), $b_n = 0$.

Analogamente, se $f(x)$ é uma função ímpar então $f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é uma função ímpar e, por (5.7.2), $a_0 = 0$ e, por (5.7.3), $a_n = 0$.

Passando para as séries de Fourier, tem-se:

Teorema 5.8.3 (i) *A série de Fourier de uma função **par** de período $2L$, é uma **série de Fourier de co-senos**:*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (5.8.3)$$

com coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.8.4)$$

(ii) *A série de Fourier de uma função **ímpar** de período $2L$, é uma **série de Fourier de senos**:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (5.8.5)$$

com coeficientes

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.8.6)$$

Obviamente que as expressões anteriores ficam simplificadas nos casos em que as funções têm período 2π .

Outro tipo de simplificações podem ser obtidas com o próximo resultado:

Teorema 5.8.4 1. *Os coeficientes de Fourier da função soma $f_1 + f_2$ são as somas dos correspondentes coeficientes de Fourier de f_1 e f_2 .*

2. *Os coeficientes de Fourier de cf são o produto de c pelos coeficientes de Fourier de f .*

Exemplo 5.8.5 *Se adicionarmos a constante k à função referida no Exercício 5.3.1,*

$$f(x) = \begin{cases} -k & , \quad -\pi < x < 0 \\ k & , \quad 0 < x < \pi \end{cases} \quad , \quad k > 0, \quad f(x+2\pi) = f(x),$$

obtem-se

$$f^*(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi < x < 0 \\ 2k & , \quad 0 < x < \pi \end{cases} \quad , \quad k > 0, \quad f^*(x+2\pi) = f^*(x).$$

Então a série de Fourier associada a f^* será

$$f^*(x) = k + \frac{4k}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{5} \operatorname{sen}(5x) + \dots \right).$$

Exemplo 5.8.6 (Onda em zigzag) Para determinar a série de Fourier da função

$$f(x) = x + \pi \quad \text{se} \quad -\pi < x < \pi \quad \text{e} \quad f(x + 2\pi) = f(x),$$

pode considerar-se a função escrita como uma soma de funções

$$f = f_1 + f_2, \quad \text{sendo } f_1 = x \quad \text{e} \quad f_2 = \pi.$$

Os coeficientes de Fourier de f_2 são nulos, excepto o primeiro termo (constante), que é π . Logo, pelo Teorema 5.8.4, os coeficientes a_n e b_n para f serão os de f_1 , excepto para a_0 , que é π .

Como f_1 é uma função ímpar, $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(x) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{-x \cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right) \\ &= -\frac{2}{n} \cos(n\pi). \end{aligned}$$

Assim a série de Fourier é dada por

$$f(x) = \pi + 2 \left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x) - \dots \right).$$

5.9 Prolongamentos periódicos

Nalgumas aplicações (vibração de uma corda num certo período de tempo, aquecimento de uma barra de metal de comprimento L, \dots) é necessário obter a série de Fourier de uma função f , dada apenas num intervalo, por exemplo, $[0, L]$ e estender depois o seu comportamento para um intervalo mais vasto.

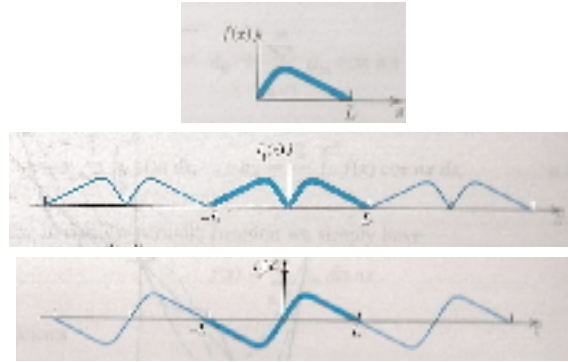
O processo é simples.

Para a função dada, f , calculam-se os coeficientes de Fourier de acordo com o Teorema 5.8.3.

A partir daqui temos duas opções:

(i) Se utilizarmos (5.8.4), obtem-se uma série de Fourier de co-senos (5.8.3), que representa a **extensão periódica par** f_1 (ou o **prolongamento periódico par**) de f .

(ii) Se se utilizar a série de senos (5.8.5), obtem-se a **extensão periódica ímpar** f_2 (ou o **prolongamento periódico ímpar**) de f .



Ambas as extensões têm período $2L$, mas, contudo, bastará fazer o seu estudo em apenas metade do seu domínio, já que a outra parte é obtida por "decalque".

Exercício 5.9.1 *Determinar duas expansões periódicas da função*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{L}x & , \quad 0 < x < \frac{L}{2} \\ \frac{2k}{L}(L-x) & , \quad \frac{L}{2} < x < L. \end{cases}$$

Resolução:

(i) Prolongamento par periódico: Por (5.8.4), tem-se

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \left(\frac{2k}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} x \, dx + \frac{2k}{L} \int_{\frac{L}{2}}^L (L-x) \, dx \right) = \frac{k}{2}, \\ a_n &= \frac{2}{L} \left(\frac{2k}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} x \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + \frac{2k}{L} \int_{\frac{L}{2}}^L (L-x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right) \quad (5.9.1) \end{aligned}$$

No primeiro integral obtem-se, integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{L}{2}} x \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx &= \left[\frac{Lx}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]_0^{\frac{L}{2}} - \frac{L}{n\pi} \int_0^{\frac{L}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &= \frac{L^2}{2n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 \right). \end{aligned}$$

Procedendo de modo análogo para o segundo integral, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\frac{L}{2}}^L (L-x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx &= \left[\frac{L}{n\pi} (L-x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]_{\frac{L}{2}}^L \\ &\quad + \frac{L}{n\pi} \int_{\frac{L}{2}}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &= 0 - \frac{L}{n\pi} \left(L - \frac{L}{2} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &\quad - \frac{L^2}{n^2\pi^2} \left(\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Incluindo estes dois resultados na expressão (5.9.1),

$$a_n = \frac{4k}{n^2\pi^2} \left(2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi) - 1 \right),$$

pelo que $a_n = 0$ se $n \neq 2, 6, 10, 14, \dots$. Portanto, a extensão par periódica de $f(x)$ é

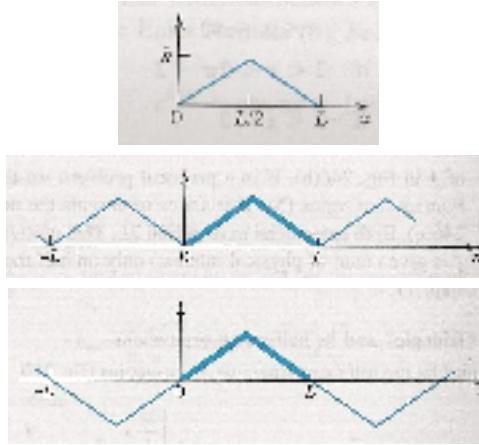
$$f(x) = \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2} \left(\frac{1}{2^2} \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + \frac{1}{6^2} \cos\left(\frac{6\pi}{L}x\right) + \dots \right).$$

(ii) Prolongamento ímpar periódico: Por (5.8.6), obtem-se

$$b_n = \frac{8k}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

e a expansão periódica ímpar é

$$f(x) = \frac{8k}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) - \frac{1}{3^2} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + \frac{1}{5^2} \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{L}x\right) - \dots \right).$$



5.10 Séries de Fourier complexas

Os cálculos para determinar os coeficientes de Fourier, por vezes, tornam-se mais simples recorrendo à exponencial complexa:

$$e^{inx} = \cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx) \quad (5.10.1)$$

$$e^{-inx} = \cos(nx) - i \operatorname{sen}(nx). \quad (5.10.2)$$

Adicionando estas duas igualdades e dividindo por 2, tem-se

$$\cos(nx) = \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}). \quad (5.10.3)$$

Subtraindo-as e dividindo por $2i$,

$$\operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}). \quad (5.10.4)$$

Assim

$$\begin{aligned} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) &= \frac{1}{2} a_n (e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{1}{2i} b_n (e^{inx} - e^{-inx}) \\ &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{inx} + \frac{1}{2} (a_n + ib_n) e^{-inx}. \end{aligned}$$

Com as notações

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ \frac{1}{2} (a_n - ib_n) &= c_n \\ \frac{1}{2} (a_n + ib_n) &= d_n, \end{aligned}$$

a série de Fourier complexa pode-se escrever

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + d_n e^{-inx}). \quad (5.10.5)$$

Os coeficientes c_n e d_n são dados por

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos(nx) - i \operatorname{sen}(nx)) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \\ d_n &= \frac{1}{2} (a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx)) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx. \end{aligned}$$

Estas duas fórmulas podem ser combinadas definindo $d_n := c_{-n}$. Deste modo, a **série de Fourier complexa** pode representar-se por

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}. \quad (5.10.6)$$

Os **coeficientes de Fourier complexos** de $f(x)$, c_n , obtêm-se por

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.10.7)$$

Para uma função com período $2L$, aplicando o mesmo tipo de argumento que anteriormente, tem-se a **série de Fourier complexa**

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{L} x}, \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Exercício 5.10.1 Determinar a série de Fourier complexa de $f(x) = e^x$ se $x \in]-\pi, \pi[$ e $f(x + 2\pi) = f(x)$.

A partir dela obtenha a série de Fourier usual (real).

Resolução:

Como $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$ para $n \in \mathbb{Z}$, então

$$e^{\pm in\pi} = \cos(n\pi) \pm i \operatorname{sen}(n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n.$$

Assim, em (5.10.7),

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-in} [e^{x-inx}]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-in} (e^{\pi} - e^{-\pi}) (-1)^n.$$

Como

$$\frac{1}{1-in} = \frac{1+in}{(1-in)(1+in)} = \frac{1+in}{1+n^2}$$

e

$$e^{\pi} - e^{-\pi} = 2 \operatorname{senh}\pi,$$

então a série de Fourier complexa é

$$e^x = \frac{\operatorname{senh}\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2} e^{inx}, \quad x \in]-\pi, \pi[. \quad (5.10.8)$$

Como obter a série de Fourier real ? Repare-se que

$$\begin{aligned} (1+in) e^{inx} &= (1+in) (\cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx)) \\ &= (\cos(nx) - n \operatorname{sen}(nx)) + i (n \cos(nx) + \operatorname{sen}(nx)) \end{aligned}$$

e, para o termo simétrico correspondente, $-n$, tem-se

$$\begin{aligned} (1-in) e^{-inx} &= (1-in) (\cos(nx) - i \operatorname{sen}(nx)) \\ &= (\cos(nx) - n \operatorname{sen}(nx)) - i (n \cos(nx) + \operatorname{sen}(nx)). \end{aligned}$$

Assim, a soma destas duas expressões será

$$2 [\cos(nx) - n \operatorname{sen}(nx)], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Para $n = 0$ tem-se apenas um termo, pelo que a série real de Fourier é

$$e^x = \frac{2\operatorname{senh}\pi}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{(\cos(x) - \operatorname{sen}(x))}{1+1^2} + \frac{(\cos(2x) - 2\operatorname{sen}(2x))}{1+2^2} - \dots \right],$$

para $x \in]-\pi, \pi[$.

5.11 Integrais de Fourier

As séries de Fourier são uma ferramenta poderosa para tratar problemas que envolvam funções periódicas.

Como aplicar este método a situações com funções não periódicas ?

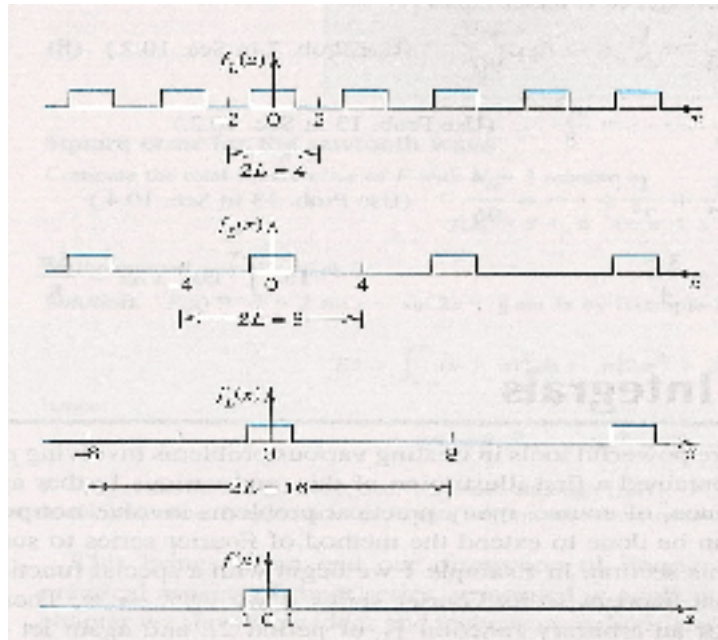
Esse é o objectivo desta secção.

Comece-se por observar o seguinte exemplo:

Exemplo 5.11.1 Considere-se uma onda quadrada periódica $f_L(x)$, com período $2L > 2$, dada pela função

$$f_L(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -L < x < -1 \\ 1 & , \quad -1 < x < 1 \\ 0 & , \quad 1 < x < L. \end{cases}$$

Para qualquer valor de L (finito) obtem-se uma função periódica de período $2L$.



Contudo, quando $L \rightarrow +\infty$ obtem-se a função não periódica

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow +\infty} f_L(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -1 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{nos outros casos.} \end{cases} \quad (5.11.1)$$

Veja-se agora o que acontece com os coeficientes de Fourier de $f_L(x)$, à medida que L aumenta.

Como $f_L(x)$ é uma função par então $b_n = 0$ para qualquer n . Para os outros casos temos

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-1}^1 1 dx = \frac{1}{L}, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^1 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\right). \end{aligned}$$

Quando $L \rightarrow +\infty$, todos os coeficientes se anulam e não existe correspondência com a função (5.11.1).

O exemplo anterior evidencia ser necessário algum cuidado quando se consideram valores de L suficientemente grandes.

Como passar então da série de Fourier para o integral de Fourier e controlar o que acontece quando $L \rightarrow +\infty$?

Considere-se uma função periódica qualquer $f_L(x)$, de período $2L$. Definindo $w_n := \frac{n\pi}{L}$, a função pode ser representada pela série de Fourier

$$f_L(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(w_n x) + b_n \operatorname{sen}(w_n x)).$$

Aplicando as fórmulas para os coeficientes de Fourier, (5.7.2)-(5.7.4), e designando por v a variável de integração, tem-se

$$\begin{aligned} f_L(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(v) dv \\ &+ \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos(w_n x) \int_{-L}^L f_L(v) \cos(w_n v) dv \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sen}(w_n x) \int_{-L}^L f_L(v) \operatorname{sen}(w_n v) dv \right]. \end{aligned}$$

Definindo

$$\Delta w := w_{n+1} - w_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L},$$

então $\frac{1}{L} = \frac{\Delta w}{\pi}$ e a série de Fourier pode escrever-se

$$\begin{aligned} f_L(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(v) dv \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos(w_n x) \Delta w \int_{-L}^L f_L(v) \cos(w_n v) dv \right. \\ &\quad \left. + \sin(w_n x) \Delta w \int_{-L}^L f_L(v) \sin(w_n v) dv \right], \end{aligned} \quad (5.11.2)$$

para qualquer valor de L fixo, suficientemente grande mas finito.

Considere-se que $L \rightarrow +\infty$ e que a função limite, não periódica,

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow +\infty} f_L(x)$$

é **absolutamente integrável** em x , isto é o integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \quad (5.11.3)$$

existe e é finito. Então $\frac{1}{L} \rightarrow 0$ e o valor do primeiro integral de (5.11.2) tende para zero.

Por outro lado, $\Delta w = \frac{\pi}{L} \rightarrow 0$ e parece "natural" que as séries em (5.11.2) se transformem em integrais impróprios. Assim

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\cos(wx) \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \cos(wv) dv + \sin(wx) \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \sin(wv) dv \right] dw. \quad (5.11.4)$$

Introduzindo as notações

$$A(w) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \cos(wv) dv \quad \text{e} \quad B(w) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \sin(wv) dv, \quad (5.11.5)$$

pode escrever-se

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [A(w) \cos(wx) + B(w) \sin(wx)] dw, \quad (5.11.6)$$

que é designada como a representação de $f(x)$ por um **integral de Fourier**.

As condições suficientes que permitem validar a expressão sugerida por (5.11.6), são dadas pelo próximo teorema:

Teorema 5.11.2 *Se $f(x)$ é seccionalmente contínua em qualquer intervalo limitado $[a, b]$, possui derivadas laterais finitas em todos os pontos de $[a, b]$ e o integral (5.11.3) existe e é finito, então $f(x)$ pode ser representada pelo integral de Fourier (5.11.6).*

Nos pontos em que $f(x)$ é descontínua o valor do integral de Fourier é igual à média dos limites laterais de $f(x)$ nesses pontos.

A demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em

A. Zygmund, *Trygonometric series*, 2nd Ed., Cambridge University Press, 1988.

A principal utilização integral de Fourier reside na resolução de equações diferenciais. Contudo também se poderá utilizar no estudo de funções definidas por integrais:

Exercício 5.11.3 *Determinar o integral de Fourier associado à função*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| < 1 \\ 0 & , \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Resolução: Por (5.11.5), tem-se

$$\begin{aligned} A(w) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \cos(wv) dv = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos(wv) dv = \left[\frac{\text{sen}(wv)}{\pi w} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2 \text{sen } w}{\pi w}, \\ B(w) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \text{sen}(wv) dv = 0 \end{aligned}$$

e, por (5.11.6),

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(wx) \text{sen } w}{w} dw. \quad (5.11.7)$$

No ponto de descontinuidade $x = 1$, o valor do integral será $\frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$. Por outro lado, por (5.11.7), tem-se

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(wx) \operatorname{sen} w}{w} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{\pi}{4} & , \quad x = 1 \\ 0 & , \quad x > 1. \end{cases}$$

No caso de funções pares ou ímpares, os integrais de Fourier tornam-se mais simples, seguindo os argumentos apresentados para os casos das séries.

O objectivo das igualdade seguintes é apenas o de facilitar os cálculos:

Se $f(x)$ é uma função par, então $B(w) = 0$,

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(v) \cos(wv) dv \quad (5.11.8)$$

e o integral de Fourier reduz-se a um **integral de Fourier de co-senos**

$$f(x) = \int_0^{+\infty} A(w) \cos(wx) dw. \quad (5.11.9)$$

De modo análogo, se $f(x)$ é uma função ímpar, então $A(w) = 0$,

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(v) \operatorname{sen}(wv) dv \quad (5.11.10)$$

e o integral de Fourier torna-se num **integral de Fourier de senos**

$$f(x) = \int_0^{+\infty} B(w) \operatorname{sen}(wx) dw. \quad (5.11.11)$$

Os integrais de Fourier também podem ser utilizados para calcular integrais:

Exercício 5.11.4 *Determinar os integrais de Fourier de senos e de co-senos da função $f(x) = e^{-kx}$, para $x > 0$ e $k > 0$, e calcular os **integrais de Laplace***

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(wx)}{k^2 + w^2} dw \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \frac{w \operatorname{sen}(wx)}{k^2 + w^2} dw.$$

Resolução: Por (5.11.8),

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-kv} \cos(wv) dv.$$

Integrando por partes

$$\int e^{-kv} \cos(wv) dv = -\frac{k}{k^2 + w^2} e^{-kv} \left(-\frac{w}{k} \operatorname{sen}(wv) + \cos(wv) \right).$$

Se $v = 0$, o segundo membro é igual a $-\frac{k}{k^2 + w^2}$. Se v tender para $+\infty$, o segundo membro tende para zero. Portanto,

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \frac{k}{k^2 + w^2}.$$

Substituindo em (5.11.9) obtem-se o integral de Fourier de co-senos:

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2k}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(wx)}{k^2 + w^2} dw, \quad x > 0 \text{ e } k > 0.$$

Assim

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(wx)}{k^2 + w^2} dw = e^{-kx} \frac{\pi}{2k}, \quad x > 0 \text{ e } k > 0.$$

Pelo mesmo processo, por (5.11.10),

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-kv} \operatorname{sen}(wv) dv$$

e, integrando por partes,

$$\int e^{-kv} \operatorname{sen}(wv) dv = -\frac{w}{k^2 + w^2} e^{-kv} \left(\frac{k}{w} \operatorname{sen}(wv) + \cos(wv) \right).$$

Para $v = 0$, o segundo membro é $-\frac{w}{k^2 + w^2}$ e tende para zero quando v tender para $+\infty$. Assim,

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \frac{w}{k^2 + w^2}$$

e, por (5.11.11) o integral de Fourier de senos é

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{w \operatorname{sen}(wx)}{k^2 + w^2} dw, \quad x > 0 \text{ e } k > 0.$$

A partir daqui obtem-se

$$\int_0^{+\infty} \frac{w \operatorname{sen}(wx)}{k^2 + w^2} dw = e^{-kx} \frac{\pi}{2}, \quad x > 0 \text{ e } k > 0.$$

5.12 Exercícios

1. Desenvolva em série de Fourier as seguintes funções e esboce os gráficos das respectivas extensões periódicas, de período 2π :

- a) $f(x) = x^2, 0 < x < 2\pi$.
- b) $f(x) = x^2, -\pi \leq x \leq \pi$.
- c) $f(x) = |x|, -\pi \leq x \leq \pi$.
- d) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$.
- e) $f(x) = x, -\pi < x < \pi$.
- f) $f(x) = Ax^2 + Bx + C, -\pi < x < \pi, A, B, C \in \mathbb{R}$.

2. Utilizando os resultados de 1, mostre que:

- a) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$.
- b) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \dots = \frac{\pi^2}{12}$.

3. Considere a função periódica, com período 10:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -5 < x < 0 \\ 3 & , \quad 0 < x < 5. \end{cases}$$

- a) Determine os coeficientes de Fourier correspondentes.
- b) Escreva a série de Fourier associada a f .
- c) Que valores deverá f assumir em $x = -5$, $x = 0$ e $x = 5$ para que a série de Fourier seja convergente para $f(x)$ em $-5 \leq x \leq 5$?

4. Prove que:

- a) uma função par não pode conter termos em senos na sua série de Fourier.
- b) uma função ímpar não pode conter termos em co-senos, nem o termo constante na série de Fourier associada.

5. Estude a paridade das funções seguintes e escreva a respectiva série de Fourier:

- a) $f(x) = \begin{cases} -2x & , \quad -\pi < x < 0 \\ 2x & , \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$
- b) $f(x) = \operatorname{sen} x, 0 < x < \pi$.
- c) $f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 < x < \pi \\ \pi - x & , \quad \pi < x < 2\pi. \end{cases}$

6. Mostre que os seguintes conjuntos de funções são ortogonais em $[0, L]$:

- a) $1, \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \dots, \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \dots$
 b) $\text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right), \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \dots, \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \dots$
 c) $\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right), \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{2L}\right), \text{sen}\left(\frac{5\pi x}{2L}\right), \dots$

7. Indique os prolongamentos periódicos par e ímpar para a função

$$f(x) = x, \quad 0 < x < 2.$$

Esboce os respectivos gráficos.

8. Determine a série de Fourier complexa para as seguintes funções e, a partir daí, obtenha a série de Fourier real:

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & , \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$

b) $f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi.$

9. Mostre que os integrais seguintes representam as funções indicadas:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xw) + w \text{sen}(xw)}{1+w^2} dw = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \quad x = 0 \\ \pi e^{-x} & , \quad x > 0. \end{cases}$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen } w \cos(xw) + w}{w} dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{\pi}{4} & , \quad x = 1 \\ 0 & , \quad x > 1. \end{cases}$

10. Indique o integral de Fourier de co-senos das seguintes funções:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad x > 1. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 < x < a \\ 0 & , \quad x > a. \end{cases} \quad (a > 0)$

11. Escreva o integral de Fourier de senos das funções:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad x > 1. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & , \quad 0 < x < \pi \\ 0 & , \quad x > \pi. \end{cases}$

Bibliografia

Bibliografia base

- E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- L. Barreira, *Análise Complexa e Equações Diferenciais*, Istpress, 30, 2009.
- F.R. Dias Agudo, *Análise Real*, Vols. I e II , Escolar Editora, 1989.
- J. Marsden e A. Weinstein, *Calculus III*, Springer-Verlag, 1985.
- T. Apostol, *Cálculo*, Vols. I e II, Editora Reverté, Lda., 1999.
- B. Demidovich, *Problemas e exercícios de Análise Matemática*, McGraw-Hill, 1993.
- E. W. Swokowski, *Cálculo com Geometria Analítica*, Vols. 1 e 2, McGraw-Hill, 1983.

Leituras complementares

I. Elementos de Geometria Diferencial em \mathbb{R}^3

- M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
- O. Neto, *Tópicos de Geometria*, Universidade Aberta, 1999.
- A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer, 2001.
- A. Goetz, *Introduction to Differential Geometry*, Addison-Wesley, 1968.

- A. Gray, S. Salamon e E. Abbena, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Press, 3ª Edição, 2006.

II. Introdução à Análise Complexa

- L. V. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill, 3rd ed, 1979.
- J. E. Marsden and M. J. Hoffman. *Basic Complex Analysis*. Freeman, 3rd ed, 1999.
- W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, third edition, 1976.
- W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, third edition, 1987.

V. Séries de Fourier

- A. Zygmund, *Trygonometric series*, 2nd Ed., Cambridge University Press, 1988